数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする．

$$a_1=1,\quad a_{n+1}=S_n+(n+1)^2\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

が成り立つとき，以下の空欄をうめよ．

(1) a_{n+1} を a_n と n の式で表すと $a_{n+1}=\boxed{\text{イ}}$ である．

(2) $b_n=a_{n+1}-a_n$ とおくとき，b_{n+1} を b_n の式で表すと $b_{n+1}=\boxed{\text{ロ}}$ である．

(3) b_n を n の式で表すと $b_n=\boxed{\text{ハ}}$ である．

(4) a_n を n の式で表すと $a_n=\boxed{\text{ニ}}$ である．

(23 会津大 コンピュータ理工 4)

【答】

イ	ロ	ハ	ニ
$2a_n+2n+1$	$2b_n+2$	$3\cdot 2^n-2$	$3\cdot 2^n-2n-3$

【解答】

$$a_1=1 \qquad \cdots\cdots ①$$

$$a_{n+1}=S_n+(n+1)^2\quad (n\geqq 1) \qquad \cdots\cdots ②$$

(1) ② において，n を $n-1$ とおくと

$$a_n=S_{n-1}+n^2\quad (n\geqq 2) \qquad \cdots\cdots ③$$

②，③ の辺々を引くと

$$a_{n+1}-a_n=a_n+(2n+1)\quad (\because\ S_n-S_{n-1}=a_n)$$

$$\therefore\quad a_{n+1}=2a_n+2n+1\quad (n\geqq 2) \qquad \cdots\cdots ④$$

② において $n=1$ とおくと

$$a_2=S_1+2^2=1+4=5\quad (\because\ S_1=a_1=1)$$

であり，④ は $n=1$ のときも成り立つ．よって

$$a_{n+1}=\boldsymbol{2a_n+2n+1}\quad (n\geqq 1) \qquad \cdots\cdots ⑤ \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) ⑤ において n を $n-1$ とおくと

$$a_n=2a_{n-1}+2(n-1)+1\quad (n\geqq 2) \qquad \cdots\cdots ⑥$$

⑤，⑥ の辺々を引くと

$$a_{n+1}-a_n=2(a_n-a_{n-1})+2$$

$b_n=a_{n+1}-a_n$ とおくと

$$b_n=2b_{n-1}+2\quad (n\geqq 2)$$

$$\therefore\quad b_{n+1}=\boldsymbol{2b_n+2}\quad (n\geqq 1) \qquad \cdots\cdots ⑦ \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(3) ⑦ は

$$b_{n+1}+2=2(b_n+2)$$

と変形される．数列 $\{b_n\}$ は初項 $b_1+2=(a_2-a_1)+2=(5-1)+2=6$，公比 2 の等比数列であるから

$$b_n+2=6\cdot 2^{n-1}=3\cdot 2^n$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{b_n=3\cdot 2^n-2}\quad (n\geqq 1) \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(4) (3) より，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(3 \cdot 2^k - 2) \\ &= 1 + \frac{6(2^{n-1}-1)}{2-1} - 2(n-1) \\ &= 3 \cdot 2^n - 2n - 3 \end{aligned}$$

これは $n = 1$ のときも成り立つ．よって

$$a_n = \mathbf{3 \cdot 2^{\boldsymbol{n}} - 2\boldsymbol{n} - 3} \quad (n \geqq 1) \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

- ⑤ は $\alpha(n+1) = 2\alpha(n) + 2n + 1$ を満たす $\alpha(n)$ を求めることにより，解くこともできる．
  $\alpha(n) = pn + q$ とおくと
  $$p(n+1) + q = 2(pn + q) + 2n + 1 \qquad \cdots\cdots ⑤'$$
  すべて n について成り立つ条件は
  $$\begin{cases} p = 2p + 2 \\ p + q = 2q + 1 \end{cases} \qquad \therefore \quad p = -2, \quad q = -3$$
  である．⑤, ⑤$'$ の辺々を引くことにより，⑤ は
  $$a_{n+1} + 2(n+1) + 3 = 2(a_n + 2n + 3)$$
  と変形される．数列 $\{a_n + 2n + 3\}$ は初項 $a_1 + 2 \cdot 1 + 3 = 1 + 2 + 3 = 6$，公比 2 の等比数列であるから
  $$\begin{aligned} & a_n + 2n + 3 = (1 + 2 + 3)2^{n-1} \\ \therefore \quad & a_n = 3 \cdot 2^n - 2n - 3 \quad (n \geqq 1) \end{aligned}$$
  である．