n を自然数とする．正の実数 $a=\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$, $b=\sqrt[3]{-2+\sqrt{5}}$ を用いて，数列 $\{c_n\}$ を $c_n=a^n-b^n$ と定める．以下の問いに答えよ．

(1) ab, c_3, c_1 がそれぞれ整数であることを示せ．

(2) $\dfrac{c_2}{\sqrt{5}}$, $\dfrac{c_4}{\sqrt{5}}$ がそれぞれ整数であることを示せ．

(3) $f(a)=f(b)=0$ となるような，整数係数の 4 次多項式 $f(x)$ を 1 つ求めよ．また，漸化式 $c_{n+4}=Ac_{n+2}+Bc_n$ を満たすような定数 A および B の値をそれぞれ求めよ．

(4) c_{2n-1} および $\dfrac{c_{2n}}{\sqrt{5}}$ がそれぞれ正の整数であることを示せ．さらに，c_{2n-1} が $(c_{2n})^2-1$ の約数であることを示せ．

(23 公立はこだて未来大 シス情 3)

【答】

(1) 略

(2) 略

(3) $f(x)=x^4-3x^2+1$，$A=3$，$B=-1$

(4) 略

【解答】

$$a=\sqrt[3]{2+\sqrt{5}},\ b=\sqrt[3]{-2+\sqrt{5}},\ c_n=a^n-b^n$$

(1) 与えられた条件より

$$ab=\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\sqrt[3]{-2+\sqrt{5}}=\sqrt[3]{(\sqrt{5})^2-2^2}=\sqrt[3]{1}=1 \qquad \cdots\cdots ①$$

$$c_3=a^3-b^3=(2+\sqrt{5})-(-2+\sqrt{5})=4 \qquad \cdots\cdots ②$$

$$c_1=a-b=\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}=\frac{a^3-b^3}{(a-b)^2+3ab}=\frac{4}{{c_1}^2+3} \qquad (\because ①,\ ②)$$

式を整理すると

$${c_1}^3+3c_1-4=0$$

$$(c_1-1)({c_1}^2+c_1+4)=0$$

$c_1(=\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}-\sqrt[3]{-2+\sqrt{5}})$ は実数であるから

$$c_1=1$$

である．

以上より，ab, c_3, c_1 はそれぞれ整数である． $\cdots\cdots$ (証明終わり)

(2) 与えられた条件より

$$c_2=a^2-b^2=(a-b)(a+b)=c_1(a+b)=a+b$$

(1) の計算から $a^2+ab+b^2={c_1}^3+3=4$ を得るが，この式より

$$(a+b)^2-ab=4$$

$$\therefore\quad (a+b)^2=4+ab \qquad \therefore\quad a+b=\sqrt{5}\ (>0) \qquad \cdots\cdots ③$$

が成り立つ．

$$c_2=\sqrt{5} \qquad \therefore\quad \frac{c_2}{\sqrt{5}}=1$$

である．また

$$c_4 = a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) = \sqrt{5} \cdot 3 \quad (\because\ a^2 + b^2 = 4 - ab = 3)$$

$$\therefore \quad \frac{c_4}{\sqrt{5}} = 3$$

以上より，$\dfrac{c_2}{\sqrt{5}}$，$\dfrac{c_4}{\sqrt{5}}$ はそれぞれ整数である． ……(証明終わり)

(3) ① かつ ③ より，a，b を解とする 2 次方程式の 1 つは

$$x^2 - \sqrt{5}x + 1 = 0$$

である．

$$x^2 + 1 = \sqrt{5}x$$

の辺々を平方すると

$$x^4 + 2x^2 + 1 = 5x^2$$

$$\therefore \quad x^4 - 3x^2 + 1 = 0$$

よって，$f(a) = f(b) = 0$ となるような整数係数の 4 次多項式の 1 つは

$$\boldsymbol{x^4 - 3x^2 + 1 = 0}$$ ……(答)

である．a，b は

$$\begin{cases} a^4 - 3a^2 + 1 = 0 \\ b^4 - 3b^2 + 1 = 0 \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} a^{n+4} = 3a^{n+2} - a^n \\ b^{n+4} = 3b^{n+2} - b^n \end{cases}$$

を満たす．辺々の差をとると

$$a^{n+4} - b^{n+4} = 3(a^{n+2} - b_{n+2}) - (a^n - b^n)$$

$$\therefore \quad c_{n+4} = 3c_{n+2} - c_n \qquad \cdots\cdots ④$$

であり，漸化式 $c_{n+4} = Ac_{n+2} + Bc_n$ を満たすような定数 A および B の値は

$$\boldsymbol{A = 3, \quad B = -1}$$ ……(答)

である．

(4) ④ と $c_1 = 1$，$c_3 = 4$ であることから，数学的帰納法によりすべての自然数 n に対して c_{2n-1} は正の整数である． ……(証明終わり)

また，④ と $\dfrac{c_2}{\sqrt{5}} = 1$，$\dfrac{c_4}{\sqrt{5}} = 3$ であることから，数学的帰納法によりすべての自然数 n に対して $\dfrac{c_{2n}}{\sqrt{5}}$ は正の整数である． ……(証明終わり)

さらに，a，b は

$$\begin{cases} a^2 - \sqrt{5}a + 1 = 0 \\ b^2 - \sqrt{5}b + 1 = 0 \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} a^{n+2} = \sqrt{5}a^{n+1} - a^n \\ b^{n+2} = \sqrt{5}b^{n+1} - b^n \end{cases}$$

を満たす．辺々の差をとると

$$a^{n+2} - b^{n+2} = \sqrt{5}(a^{n+1} - b^{n+1}) - (a^n - b^n)$$

$$\therefore \quad c_{n+2} = \sqrt{5}c_{n+1} - c_n \qquad \cdots\cdots ⑤$$

を満たす．これと (1)，(2) の結果より

n	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
c_n	1	$\sqrt{5}$	4	$3\sqrt{5}$	11	$8\sqrt{5}$	29	$\cdots$

であり

$$(c_2)^2 - 1 = (\sqrt{5})^2 - 1 = 4 = c_1 \cdot 4$$

$$(c_4)^2 - 1 = (3\sqrt{5})^2 - 1 = 44 = c_3 \cdot 11$$

$$(c_6)^2 - 1 = (8\sqrt{5})^2 - 1 = 319 = c_5 \cdot 29$$

$$\vdots$$

となるから

$$(c_{2n})^2 - 1 = c_{2n-1} \cdot c_{2n+1} \qquad \cdots\cdots (*)$$

と推定される．すべて自然数 n について $(*)$ が成り立つことを数学的帰納法を用いて示す．

(i) $n = 1$ のとき

$$(c_2)^2 - 1 = 4 = c_1 \cdot 4 = c_1 \cdot c_3$$

であり，$n = 1$ のとき $(*)$ は成り立つ．

(ii) $n = k$ での成立を仮定する．

$$\begin{aligned}
&(c_{2(k+1)})^2 - 1 \\
&= (\sqrt{5}c_{2k+1} - c_{2k})^2 - 1 \quad (\because \text{⑤}) \\
&= 5(c_{2k+1})^2 - 2\sqrt{5}c_{2k+1}c_{2k} + (c_{2k})^2 - 1 \\
&= 5(c_{2k+1})^2 - 2\sqrt{5}c_{2k+1}c_{2k} + c_{2k-1} \cdot c_{2k+1} \quad (\because \text{帰納法の仮定}) \\
&= c_{2k+1}\left\{\sqrt{5}(\sqrt{5}c_{2k+1} - c_{2k}) - (\sqrt{5}c_{2k} - c_{2k-1})\right\} \\
&= c_{2k+1}(\sqrt{5}c_{2k+2} - c_{2k+1}) \\
&= c_{2k+1} \cdot c_{2k+3}
\end{aligned}$$

$n = k + 1$ のときも $(*)$ は成り立つ．

以上，(i)，(ii) より，すべての自然数について $(*)$ が成り立つ．

c_{2n-1}，c_{2n+1} は正の整数であるから，c_{2n-1} は $(c_{2n})^2 - 1$ の約数である．

$\cdots\cdots$ (証明終わり)