初項が $a_1 = 0$ である数列 $\{a_n\}$ を，1 以上の整数 n について

$$a_{n+1} = 4a_n + n \cdot 2^n \qquad \cdots\cdots ①$$

で定めると，その一般項は

$$a_n = 2^{2n-1} - (n+1)2^{n-1} \qquad \cdots\cdots ②$$

である．以下の問いに答えなさい．解答欄には途中の計算過程も書きなさい．

(1) 式 ① から a_3 の値を求めなさい．また，式 ② の右辺を $r(n)$ と書くとき，$r(3)$ を計算しなさい．

(2) 式 ② が 1 以上のすべての整数 n について成り立つことを数学的帰納法によって証明しなさい．

(23 公立千歳科技大 理工 3)

【答】

(1) $a_3 = 16$，$r(3) = 16$

(2) 略

【解答】

$$a_{n+1} = 4a_n + n \cdot 2^n \qquad \cdots\cdots ①$$

$$a_n = 2^{2n-1} - (n+1)2^{n-1} \qquad \cdots\cdots ②$$

(1) 式 ① から

$$a_2 = 4 \cdot 0 + 1 \cdot 2^1 = 2$$

$$a_3 = 4 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 = \mathbf{16} \qquad \cdots\cdots(答)$$

式 ② より

$$r(3) = 2^{2\cdot 3-1} - (3+1)2^{3-1} = 32 - 16 = \mathbf{16} \qquad \cdots\cdots(答)$$

- 式 ② は ① の一般項なのだから，当然 $a_3 = r(3)$ である．

(2) 式 ② が ① の一般項であることを数学的帰納法で示す．

(i) $n = 1$ のとき

式 ② の右辺に $n = 1$ を代入すると

$$2^{2\cdot 1-1} - (1+1)2^{1-1} = 2 - 2 \cdot 1 = 0$$

これは初項 $a_1 = 0$ と一致する．$n = 1$ のとき ② は成り立つ．

(ii) $n = k$ での成立を仮定する．

式 ① より

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 4a_k + k \cdot 2^k \\ &= 4\left\{2^{2k-1} - (k+1)2^{k-1}\right\} + k \cdot 2^k \quad (\because \text{ 帰納法の仮定}) \\ &= 2^{2k+1} - (k+1)2^{k+1} + k \cdot 2^k \\ &= 2^{2k+1} - (2k+2-k)2^k \\ &= 2^{2(k+1)-1} - \{(k+1)+1\}2^{(k+1)-1} \end{aligned}$$

$n = k+1$ のときも ② は成り立つ．

以上，(i)，(ii) より，1 以上のすべての整数について式 ② は成り立つ．

- ② を導いてみよう．

$$\alpha(n+1) = 4\alpha(n) + n \cdot 2^n \qquad \cdots\cdots ③$$

を満たす関数 $\alpha(n)$ がみつかれば，①，③ の辺々を引くことにより

$$a_{n+1} - \alpha(n+1) = 4(a_n - \alpha(n))$$

すなわち，公比 4 の等比数列 $\{a_n - \alpha(n)\}$ を得ることができる．

定数 $p,\ q$ を用いて $\alpha(n) = (pn+q) \cdot 2^n$ とおくと，③ は

$$\{p(n+1)+q\} \cdot 2^{n+1} = 4(pn+q) \cdot 2^n + n \cdot 2^n$$
$$2(pn+p+q) = 4(pn+q) + n$$
$$2pn + 2p + 2q = (4p+1)n + 4q$$

これがすべての自然数 n に対して成り立つ条件は

$$\begin{cases} 2p = 4p+1 \\ 2p+2q = 4q \end{cases} \qquad \therefore \quad p = -\frac{1}{2}, \quad q = -\frac{1}{2}$$

$\alpha(n) = \left(-\frac{1}{2}n - \frac{1}{2}\right) \cdot 2^n = -(n+1) \cdot 2^{n-1}$ ととればよい．

$\{a_n - \alpha(n)\}$ すなわち $\{a_n + (n+1) \cdot 2^{n-1}\}$ は，初項 $a_1 + 2 \cdot 2^{1-1} = 0 + 2 \cdot 1 = 2$，公比 4 の等比数列であるから

$$a_n + (n+1) \cdot 2^{n-1} = 2 \cdot 4^{n-1}$$
$$\therefore \quad a_n = 2^{2n-1} - (n+1) \cdot 2^{n-1}$$

である．式 ② が得られた．