数列の増減について考える．与えられた数列 $\{p_n\}$ の増減について次のように定める．

- すべての自然数 n について $p_n < p_{n+1}$ となるとき，数列 $\{p_l\}$ はつねに増加するという．
- すべての自然数 n について $p_n > p_{n+1}$ となるとき，数列 $\{p_n\}$ はつねに減少するという．
- $p_k < p_{k+1}$ となる自然数 k があり，さらに $p_\ell > p_{\ell+1}$ となる自然数 ℓ もあるとき，数列 $\{p_n\}$ は増加することも減少することもあるという．

(1) 数列 $\{a_n\}$ は

$$a_1 = 23, \quad a_{n+1} = a_n - 3 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たすとする．このとき

$$a_n = \boxed{\text{アイ}}\,n + \boxed{\text{ウエ}} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

となり，$a_n < 0$ を満たす最小の自然数 n は $\boxed{\text{オ}}$ である．

数列 $\{a_n\}$ は $\boxed{\text{カ}}$．また，自然数 n に対して，$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ とおくと，数列 $\{S_n\}$ は $\boxed{\text{キ}}$．

$n \geqq \boxed{\text{オ}}$ のとき，$\boxed{\text{ク}}$．また，$b_n = \dfrac{1}{a_n}$ とおくと，$n \geqq \boxed{\text{オ}}$ のとき，$\boxed{\text{ケ}}$．

$\boxed{\text{カ}}$，$\boxed{\text{キ}}$ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい.)

⓪ つねに増加する
① つねに減少する
② 増加することも減少することもある

$\boxed{\text{ク}}$ の解答群

⓪ $a_n < 0$ である
① $a_n > 0$ である
② $a_n < 0$ となることも $a_n > 0$ となることもある

$\boxed{\text{ケ}}$ の解答群

⓪ $b_n < b_{n+1}$ である
① $b_n > b_{n+1}$ である
② $b_n < b_{n+1}$ となることも $b_n > b_{n+1}$ となることもある

(2) 数列 $\{c_n\}$ は

$$c_1 = 30, \quad c_{n+1} = \frac{50c_n - 800}{c_n - 10} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たすとする．

以下では，すべての自然数 n に対して $c_n \fallingdotseq 20$ となることを用いてよい．

$d_n = \dfrac{1}{c_n - 20}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とおくと，$d_1 = \dfrac{1}{\boxed{\text{コサ}}}$ であり，また

$$c_n = \frac{1}{d_n} + \boxed{\text{シス}} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \quad \cdots\cdots ①$$

が成り立つ．したがって

$$\frac{1}{d_{n+1}} = \frac{50\left(\dfrac{1}{d_n} + \boxed{\text{シス}}\right) - 800}{\left(\dfrac{1}{d_n} + \boxed{\text{シス}}\right) - 10} - \boxed{\text{シス}} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

により

$$d_{n+1} = \frac{d_n}{\boxed{\text{セ}}} + \frac{1}{\boxed{\text{ソタ}}} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

が成り立つ．

数列 $\{d_n\}$ の一般項は

$$d_n = \frac{1}{\boxed{\text{チツ}}}\left(\frac{1}{\boxed{\text{テ}}}\right)^{n-1} + \frac{1}{\boxed{\text{トナ}}}$$

である．

したがって，$d_n \boxed{\text{ニ}} \dfrac{1}{\boxed{\text{トナ}}}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ であり，数列 $\{d_n\}$ は $\boxed{\text{ヌ}}$

．

よって ① により，O を原点とする座標平面上に $n = 1$ から $n = 10$ まで点 $(n,\ c_n)$ を図示すると $\boxed{\text{ネ}}$ となる．

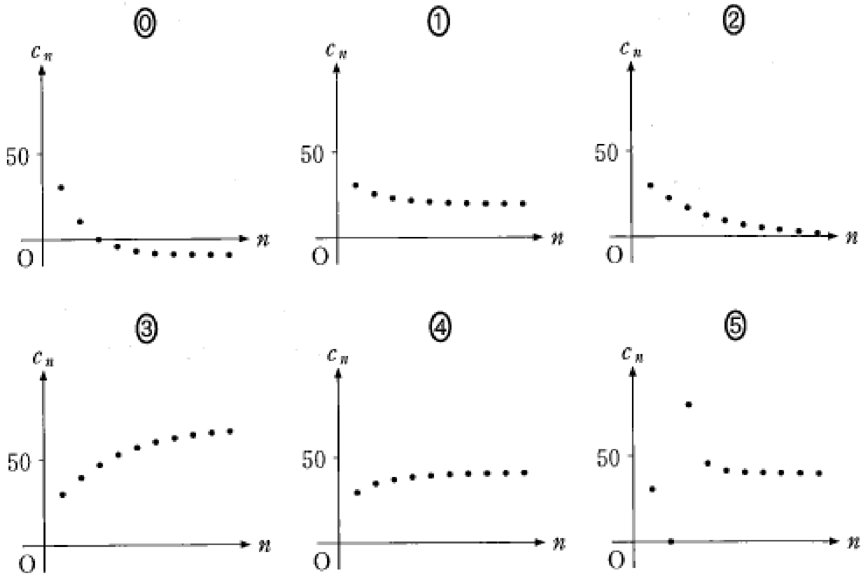
$\boxed{\text{ニ}}$ の解答群

⓪ $<$	① $=$	② $>$

$\boxed{\text{ヌ}}$ の解答群

⓪ つねに増加する
① つねに減少する
② 増加することも減少することもある

$\boxed{\text{ネ}}$ については，最も適当なものを，次の⓪〜⑤のうちから一つ選べ．



(23 共通テスト 追・再試験 IIB 4)

【答】

アイ	ウエ	オ	カ	キ	ク	ケ	コサ	シス	セ	ソタ	チツ	テ	トナ
-3	26	9	1	2	0	0	10	20	3	30	20	3	20

ニ	ヌ	ネ
2	1	4

【解答】

(1) $$a_1 = 23,\quad a_{n+1} = a_n - 3 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \qquad \cdots\cdots (*)$$

$(*)$ より，数列 $\{a_n\}$ は初項 $a_1 = 23$，公差 -3 の等差数列であるから，第 n 項は

$$\begin{aligned} a_n &= 23 + (n-1)(-3) \\ &= \mathbf{-3}n + \mathbf{26} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \end{aligned}$$ ……(答)

となり，$a_n < 0$ を満たす最小の自然数 n は

$$-3n + 26 < 0 \qquad \therefore\quad n > \frac{26}{3} = 8 + \frac{2}{3} \qquad \therefore\quad n = \mathbf{9}$$ ……(答)

である．

数列 $\{a_n\}$ は **つねに減少する．** (①) ……(答)

また，自然数 n に対して，$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ とおくと，

$n \leqq 8$ のとき，$a_n > 0$ であるから S_n は増加し，

$n \geqq 9$ のとき，$\boldsymbol{a_n < 0}$ **である** から S_n は減少する ……(答)

から，数列 $\{S_n\}$ は **増加することも減少することもある．** (②) ……(答)

$n \geqq 9$ のとき，$0 > a_n > a_{n+1}$ であるから，$b_n = \dfrac{1}{a_n}$ とおくと，

$\boldsymbol{b_n < b_{n+1}}$ **である．** (⓪) ……(答)

(2) $$c_1 = 30, \quad c_{n+1} = \frac{50c_n - 800}{c_n - 10} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \qquad \cdots\cdots\ (**)$$

すべての自然数 n に対して $c_n \fallingdotseq 20$ となることを用いてよいから，$d_n = \dfrac{1}{c_n - 20}$ とおくと

$$d_1 = \frac{1}{30-20} = \frac{1}{\mathbf{10}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

であり，また

$$c_n - 20 = \frac{1}{d_n}$$
$$\therefore \quad c_n = \frac{1}{d_n} + \mathbf{20} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \qquad \cdots\cdots\ ① \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

が成り立つ．

- すべての自然数 n に対して $c_n \fallingdotseq 20$ となることは背理法により示される．
  $c_n = 20$ となる 2 以上の自然数 n が存在すると仮定する．

$$20 = \frac{50c_{n-1} - 800}{c_{n-1} - 10}$$
$$20(c_{n-1} - 10) = 50c_{n-1} - 800 \quad (\because\ c_{n-1} \fallingdotseq 10 \text{ が確認される})$$
$$\therefore \quad 30c_{n-1} = 600$$
$$\therefore \quad c_{n-1} = 20$$

すなわち，$c_n = 20$ となる 2 以上の自然数 n が存在するならば，$c_{n-1} = 20$ であり，この操作を繰り返すと，$a_n = a_{n-1} = \cdots = a_2 = a_1 = 20$ となる．これは $a_1 = 30$ であることに反する．

よって，すべての自然数 n に対して $c_n \fallingdotseq 20$ となることが確認された．

$(**)$ を $\{d_n\}$ についての関係式で表すと

$$\frac{1}{d_{n+1}} + 20 = \frac{50\left(\dfrac{1}{d_n} + 20\right) - 800}{\left(\dfrac{1}{d_n} + 20\right) - 10} = \frac{50 + 200d_n}{1 + 10d_n} \quad (\because\ d_n \fallingdotseq 0)$$
$$\therefore \quad \frac{1}{d_{n+1}} = \frac{50 + 200d_n}{1 + 10d_n} - 20 = \frac{30}{1 + 10d_n}$$

により

$$d_{n+1} = \frac{1 + 10d_n}{30} = \frac{d_n}{\mathbf{3}} + \frac{1}{\mathbf{30}} \qquad \cdots\cdots\ ② \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

が成り立つ．$\alpha = \dfrac{\alpha}{3} + \dfrac{1}{30}$ を解くと，$\alpha = \dfrac{1}{20}$ であり，② は

$$d_{n+1} - \frac{1}{20} = \frac{1}{3}\left(d_n - \frac{1}{20}\right)$$

と変形される．数列 $\left\{d_n - \dfrac{1}{20}\right\}$ は初項 $d_1 - \dfrac{1}{20} = \dfrac{1}{10} - \dfrac{1}{20} = \dfrac{1}{20}$，公比 $\dfrac{1}{3}$ の等比数列であるから

$$d_n - \frac{1}{20} = \frac{1}{20}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

数列 $\{d_n\}$ の一般項は

$$d_n = \frac{1}{\mathbf{20}}\left(\frac{1}{\mathbf{3}}\right)^{n-1} + \frac{1}{\mathbf{20}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

したがって，

$$d_n > \frac{1}{20} \ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

であり，$d_n > d_{n+1} \left(> \dfrac{1}{20}\right)$ であるから，数列 $\{d_n\}$ はつねに減少する．　(①)　……(答)

よって $0 < \dfrac{1}{d_n} < \dfrac{1}{d_{n+1}} < 20$ であり，① により，数列 $\{c_n\}$ はつねに増加し，$20 < c_n < 20 + 20$ である．$c_1 = 30$ とあわせると

$$30 = c_1 < c_2 < \cdots < c_n < \cdots < 40$$

である．O を原点とする座標平面上に $n = 1$ から $n = 10$ まで点 $(n,\ c_n)$ を図示すると (④) となる．　……(答)