$a_{n+2}-10a_{n+1}+xa_n=0$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$，$a_1=1,\ a_2=8$ を満たす数列 $\{a_n\}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $x=21$ のとき，数列 $\{a_n\}$ の一般項を以下の手順で求めよ．

(a) $(a_{n+2}-3a_{n+1})=7(a_{n+1}-3a_n)$ のように変形し，$b_n=a_{n+1}-3a_n$ によって定められる数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(b) (a) と同様の変形を行い，$c_n=a_{n+1}-7a_n$ によって定められる数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ．

(c) 数列 $\{b_n\}$ と数列 $\{c_n\}$ の一般項から，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(2) $x=25$ のとき，数列 $\{a_n\}$ の一般項を以下の手順で求めよ．

(a) $(a_{n+2}-5a_{n+1})=5(a_{n+1}-5a_n)$ のように変形し，$d_n=\dfrac{a_n}{5^n}$ によって定められる数列 $\{d_n\}$ に対し，$d_{n+1}-d_n$ を求めよ．

(b) 数列 $\{d_n\}$ の一般項から，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(23 富山大 後 工・都市 3)

【答】

(1) (a) $b_n=5\cdot 7^{n-1}$　(b) $c_n=3^{n-1}$　(c) $a_n=\dfrac{1}{4}(5\cdot 7^{n-1}-3^{n-1})$

(2) (a) $d_{n+1}-d_n=\dfrac{3}{25}$　(b) $a_n=(3n+2)\cdot 5^{n-2}$

【解答】

$a_1=1,\ a_2=8$

$a_{n+2}-10a_{n+1}+xa_n=0$ …… $(*)$

(1) $x=21$ のとき，$(*)$ は

$$a_{n+2}-10a_{n+1}+21a_n=0 \quad \cdots\cdots ①$$

である．

(a) ① は

$$(a_{n+2}-3a_{n+1})=7(a_{n+1}-3a_n)$$

と変形される．$b_n=a_{n+1}-3a_n$ によって定められる数列 $\{b_n\}$ は

$$b_{n+1}=7b_n$$

であり，数列 $\{b_n\}$ は，初項 $b_1=a_2-3a_1=8-3\cdot 1=5$，公比 7 の等比数列である．

よって，$\{b_n\}$ の一般項は

$$\boldsymbol{b_n=5\cdot 7^{n-1}}\ (n\geqq 1) \quad \cdots\cdots(答)$$

である．

(b) ①は

$$a_{n+2}-7a_{n+1}=3(a_{n+1}-7a_n) \quad \cdots\cdots ①'$$

と変形することもできる．$c_n=a_{n+1}-7a_n$ によって定められる数列 $\{c_n\}$ は

$$c_{n+1}=3c_n$$

であり，数列 $\{c_n\}$ は，初項 $c_1=a_2-7a_1=8-7\cdot 1=1$，公比 3 の等比数列である．

よって，$\{c_n\}$ の一般項は

$$\boldsymbol{c_n=3^{n-1}}\ (n\geqq 1) \quad \cdots\cdots(答)$$

である．

(c) (a) と (b) の結果式の辺々を引くと

$$(a_{n+1}-3a_n)-(a_{n+1}-7a_n)=5\cdot 7^{n-1}-3^{n-1}$$
$$4a_n=5\cdot 7^{n-1}-3^{n-1}$$
$$\therefore\quad \boldsymbol{a_n=\frac{1}{4}(5\cdot 7^{n-1}-3^{n-1})}\ (n\geqq 1) \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) $x=25$ のとき，$(*)$ は

$$a_{n+2}-10a_{n+1}+25a_n=0 \qquad \cdots\cdots ②$$

である．

(a) ② は

$$(a_{n+2}-5a_{n+1})=5(a_{n+1}-5a_n)$$

と変形される．辺々を 5^{n+2} で割ると

$$\frac{a_{n+2}}{5^{n+2}}-\frac{a_{n+1}}{5^{n+1}}=\frac{a_{n+1}}{5^{n+1}}-\frac{a_n}{5^n}$$

となる．$d_n=\frac{a_n}{5^n}$ により定められる数列 $\{d_n\}$ は

$$d_{n+2}-d_{n+1}=d_{n+1}-d_n$$

であり，数列 $\{d_{n+1}-d_n\}$ は初項 $d_2-d_1=\frac{8}{5^2}-\frac{1}{5}=\frac{3}{25}$ の定数数列である．

よって

$$\boldsymbol{d_{n+1}-d_n=\frac{3}{25}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(b) (a) より，数列 $\{d_n\}$ は，初項 $d_1=\frac{1}{5}$，公差 $\frac{3}{25}$ の等差数列であり，一般項は

$$d_n=\frac{1}{5}+\frac{3}{25}(n-1)=\frac{3n+2}{25}$$

であり

$$a_n=d_n\cdot 5^n$$
$$=\boldsymbol{(3n+2)\cdot 5^{n-2}}\ (n\geqq 1) \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．