$a_1=36$，$a_{n+1}=6{a_n}^6$，$b_n=\log_6 a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定義される数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ それぞれの一般項を求めよ．

(23 山梨大 工 2(1) 教 3(1))

【答】 $a_n=6^{\frac{1}{5}(11\cdot 6^{n-1}-1)}$，$b_n=\dfrac{1}{5}(11\cdot 6^{n-1}-1)$

【解答】

$$a_1=36,\ a_{n+1}=6{a_n}^6 \qquad \cdots\cdots ①$$

① より，数列 $\{a_n\}$ の項はすべて正である．底 6 の対数をとると

$$\log_6 a_1=\log_6 36,\ \log_6 a_{n+1}=\log_6(6{a_n}^6)$$

$$\therefore\quad \log_6 a_1=2,\ \log_6 a_{n+1}=1+6\log_6 a_n$$

$b_n=\log_6 a_n$ とおくと

$$b_1=2,\ b_{n+1}=1+6b_n$$

$\beta=1+6\beta$ の解が $\beta=-\dfrac{1}{5}$ であることから，第 2 式は

$$b_{n+1}+\frac{1}{5}=6\left(b_n+\frac{1}{5}\right)$$

と変形される．数列 $\left\{b_n+\dfrac{1}{5}\right\}$ は初項 $b_1+\dfrac{1}{5}=2+\dfrac{1}{5}=\dfrac{11}{5}$，公比 6 の等比数列であるから

$$b_n+\frac{1}{5}=\frac{11}{5}\cdot 6^{n-1}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{b_n=\frac{1}{5}(11\cdot 6^{n-1}-1)} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．よって

$$\boldsymbol{a_n}=6^{b_n}=\boldsymbol{6^{\frac{1}{5}(11\cdot 6^{n-1}-1)}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．