$c_1 = 6,\ c_{n+1} = \dfrac{n+3}{n+1}c_n + 1$，$d_n = \dfrac{c_n}{(n+1)(n+2)}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定義される数列 $\{c_n\}$, $\{d_n\}$ それぞれの一般項を求めよ．

(23 山梨大 工 2(2) 教 3(2))

【答】 $c_n = \dfrac{(n+1)(4n+5)}{3}$，$d_n = \dfrac{4n+5}{3(n+2)}$

【解答】

$$c_{n+1} = \frac{n+3}{n+1}c_n + 1$$

両辺を $(n+2)(n+3)$ で割ると

$$\frac{c_{n+1}}{(n+2)(n+3)} = \frac{c_n}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)}$$

となる．$d_n = \dfrac{c_n}{(n+1)(n+2)}$ とおくと

$$d_1 = \frac{c_1}{2 \cdot 3} = 1, \quad d_{n+1} = d_n + \frac{1}{(n+2)(n+3)}$$

となる．数列 $\{d_n\}$ の階差が $\dfrac{1}{(n+2)(n+3)}$ であることより，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} d_n &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+2)(k+3)} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3} \right) \\ &= 1 + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \frac{4n+5}{3(n+2)} \end{aligned}$$

これは $n = 1$ のときも成り立つから

$$\boldsymbol{d_n = \frac{4n+5}{3(n+2)}} \ (n \geqq 1) \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．よって

$$\boldsymbol{c_n} = (n+1)(n+2)d_n = \boldsymbol{\frac{(n+1)(4n+5)}{3}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．