数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を

$$a_1 = 1,\ b_1 = 2,$$
$$a_{n+1} = 6a_n + b_n \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$
$$b_{n+1} = -3a_n + 2b_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

により定める．次の問いに答えよ．

(1) a_2, b_2 の値を，それぞれ求めよ．
(2) 数列 $\{a_n + b_n\}$, $\{3a_n + b_n\}$ の一般項を，それぞれ求めよ．
(3) 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項を，それぞれ求めよ．
(4) 数列 $\{c_n\}$ を

$$c_1 = a_1 + b_1, \quad c_{n+1} = (a_{n+1} + b_{n+1})c_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ )$$

により定める．数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ．

(23 東京農工大 農・工 2)

【答】
(1) $a_2 = 8,\ b_2 = 1$
(2) $a_n + b_n = 3^n$，$3a_n + b_n = 5^n$
(3) $a_n = \dfrac{5^n - 3^n}{2}$，$b_n = \dfrac{3^{n+1} - 5^n}{2}$
(4) $c_n = 3^{\frac{n(n+1)}{2}} \quad (n \geqq 1)$

【解答】

$$\begin{cases} a_1 = 1,\ b_1 = 2 \\ a_{n+1} = 6a_n + b_n \\ b_{n+1} = -3a_n + 2b_n \end{cases}$$

(1) 与えられた条件より

$$a_2 = 6 \cdot 1 + 2 = \mathbf{8} \qquad \cdots\cdots(答)$$
$$b_2 = -3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = \mathbf{1} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) 与えられた条件より

$$\begin{aligned} a_{n+1} + b_{n+1} &= (6a_n + b_n) + (-3a_n + 2b_n) \\ &= 3a_n + 3b_n \\ &= 3(a_n + b_n) \end{aligned}$$

数列 $\{a_n + b_n\}$ は初項 $a_1 + b_1 = 1 + 2 = 3$ 公比 3 の等比数列であり

$$a_n + b_n = 3 \cdot 3^{n-1} = \boldsymbol{3^n} \qquad \cdots\cdots ① \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．また

$$\begin{aligned} 3a_{n+1} + b_{n+1} &= 3(6a_n + b_n) + (-3a_n + 2b_n) \\ &= 15a_n + 5b_n \\ &= 5(3a_n + b_n) \end{aligned}$$

数列 $\{3a_n + b_n\}$ は初項 $3a_1 + b_1 = 3 \cdot 1 + 2 = 5$ 公比 5 の等比数列であり，

$$3a_n + b_n = 5 \cdot 5^{n-1} = \boldsymbol{5^n} \qquad \cdots\cdots ② \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(3) ①, ② を連立する．

②－① より

$$2a_n = 5^n - 3^n \qquad \therefore \quad \boldsymbol{a_n = \frac{5^n - 3^n}{2}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

①×3－② より

$$2b_n = 3^{n+1} - 5^n \qquad \therefore \quad \boldsymbol{b_n = \frac{3^{n+1} - 5^n}{2}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

(4)
$$\begin{cases} c_1 = a_1 + b_1 \\ c_{n+1} = (a_{n+1} + b_{n+1})c_n \end{cases}$$

①より

$$c_{n+1} = 3^{n+1}c_n \qquad \cdots\cdots ③$$

$c_1 = 1 + 2 = 3 > 0$ であるから，帰納法によりすべての自然数 n に対し $c_n > 0$ であることが確認される．底が 3 の対数をとると

$$\log_3 c_{n+1} = n + 1 + \log_3 c_n$$

$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} \log_3 c_n &= \log_3 c_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(k+1) \\ &= \log_3 3 + \frac{(n-1)(2+n)}{2} \\ &= 1 + \frac{n^2 + n - 2}{2} \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore \quad c_n = 3^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

これは $n = 1$ のときも成り立つ．よって

$$\boldsymbol{c_n = 3^{\frac{n(n+1)}{2}} \quad (n \geqq 1)} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- ③を繰り返し用いると

$$\begin{aligned} c_n &= 3^n c_{n-1} \quad (n \geqq 2) \\ &= 3^n \cdot 3^{n-1} c_{n-2} \\ &= \cdots \\ &= 3^n \cdot 3^{n-1} \bullet \cdots \bullet 3^2 c_1 \\ &= 3^n \cdot 3^{n-1} \bullet \cdots \bullet 3^2 \cdot 3^1 \\ &= 3^{n+(n-1)+\cdots+2+1} \\ &= 3^{\frac{n(n+1)}{2}} \end{aligned}$$

  である．これは $n = 1$ のときも成り立つ．