正の項からなる数列 $\{a_n\}$ が，$a_1=4$，$(a_{n+1})^2=\dfrac{1}{2}(a_n)^3$，$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ によって定められている．以下の問いに答えよ．

(i) a_2，a_3 を 2 の累乗の形で表せ．

(ii) $b_n=\log_2 a_n$ としたとき，数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．また，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(iii) $a_n>2^{257}$ を満たす最小の自然数 n を求めよ．ただし，$\log_{10}2=0.30$，$\log_{10}3=0.48$ として計算せよ．

(23 東北学院大 工・情報 B 2)

【答】

(i) $a_2=2^{\frac{3}{2}}$，$a_3=2^1$

(ii) $b_n=1+\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}$，$a_n=2^{1+\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}}$

(iii)

【解答】

$$a_1=4 \qquad \cdots\cdots ①$$

$$(a_{n+1})^2=\frac{1}{2}(a_n)^3 \quad (n \geqq 1) \qquad \cdots\cdots ②$$

(i) ② に $n=1,\ 2$ を代入すると

$$(a_2)^2=\frac{1}{2}(a_1)^2=\frac{1}{2}\cdot 4^2=2^3 \qquad \therefore\quad a_2=\boldsymbol{2^{\frac{3}{2}}}\ (>0) \qquad \cdots\cdots(答)$$

$$(a_3)^2=\frac{1}{2}(a_2)^2=\frac{1}{2}\cdot 2^3=2^2 \qquad \therefore\quad a_3=\boldsymbol{2^1}\ (>0) \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(ii) $a_n>0$ より，② の辺々で底 2 の対数をとると

$$\log_2(a_{n+1})^2=\log_2\left\{\frac{1}{2}(a_n)^3\right\}$$

$$2\log_2 a_{n+1}=3\log_2 a_n-1$$

$b_n=\log_2 a_n$ とおくと

$$2b_{n+1}=3b_n-1 \qquad \therefore\quad b_{n+1}=\frac{3}{2}b_n-\frac{1}{2}$$

これは

$$b_{n+1}-1=\frac{3}{2}(b_n-1)$$

と変形される．数列 $\{b_n-1\}$ は初項 $b_1-1=\log_2 4-1=2-1=1$，公比 $\dfrac{3}{2}$ の等比数列であるから，$\{b_n\}$ の一般項は

$$b_n-1=1\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{b_n=1+\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．よって，$\{a_n\}$ の一般項は

$$\log_2 a_n=1+\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{a_n=2^{1+\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(iii) $$a_n > 2^{257} \quad \cdots\cdots ③$$

③ に (ii) の結果を代入すると

$$③ \iff 2^{1+\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}} > 2^{257} \iff 1+\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} > 257$$

$$\iff (n-1)(\log_{10}3 - \log_{10}2) > \log_{10}256$$

$\log_{10}2 = 0.30$，$\log_{10}3 = 0.48$ より

$$③ \iff (n-1)(0.48-0.30) > \log_{10}2^8$$

$$\therefore \quad 0.18(n-1) > 8 \times 0.30$$

$$\therefore \quad n > \frac{8 \times 30}{18} + 1 = 13.33\cdots + 1 = 14.33\cdots$$

よって，求める最小の自然数 n は

$$\boldsymbol{n = 15} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．