数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1=\frac{2}{3},\quad 2(a_n-a_{n+1})=(n+2)a_na_{n+1}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

により定める．以下の問いに答えよ．

(1) $a_2,\ a_3$ を求めよ．
(2) $a_n\neq 0$ を示せ．
(3) $\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}$ を n の式で表せ．
(4) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(23 熊本大 教育・医 (看護) 1)

【答】

(1) $a_2=\dfrac{1}{3},\ a_3=\dfrac{1}{5}$
(2) 略
(3) $\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{n+2}{2}$
(4) $a_n=\dfrac{4}{(n+1)(n+2)}$

【解答】

$$a_1=\frac{2}{3},$$
$$2(a_n-a_{n+1})=(n+2)a_na_{n+1}\quad (n\geqq 1)\qquad \cdots\cdots ①$$

(1) $a_1=\dfrac{2}{3}$, ① より

$$2\left(\frac{2}{3}-a_2\right)=3\cdot\frac{2}{3}\cdot a_2\qquad \therefore\quad \frac{4}{3}-2a_2=2a_2\qquad \therefore\quad \boldsymbol{a_2=\frac{1}{3}}\ \cdots\cdots(答)$$

である．さらに

$$2\left(\frac{1}{3}-a_3\right)=4\cdot\frac{1}{3}\cdot a_3\qquad \therefore\quad \frac{2}{3}-2a_3=\frac{4}{3}a_3\qquad \therefore\quad \boldsymbol{a_3=\frac{1}{5}}\ \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) 数学的帰納法を用いて

$$a_n\neq 0\qquad \cdots\cdots (*)$$

であることを示す．

(i) $n=1$ のとき，$a_1=\dfrac{2}{3}$ であるから，$n=1$ のとき $(*)$ が成り立つ．

(ii) $n=k$ での成立を仮定する．① より

$$2(a_k-a_{k+1})=(k+2)a_ka_{k+1}\qquad \cdots\cdots ②$$

が成り立つ．ここで $a_{k+1}=0$ と仮定すると，②から，$2a_k=0$ すなわち $a_k=0$ となるが，これは $a_k\neq 0$ に反する．したがって，$a_{k+1}\neq 0$ である．

(i)(ii) より，すべての自然数 n に対して $a_n\neq 0$ である．　　$\cdots\cdots$ (証明終わり)

- 数学的帰納法を用いて「$a_n>0$ …… $(**)$」であることを示してもよい．

  (i) $n=1$ のとき，$a_1=\dfrac{2}{3}$ であるから，$n=1$ のとき $(**)$ が成り立つ．

(ii) $n=k$ での成立を仮定する．① より

$$2(a_k - a_{k+1}) = (k+2)a_k a_{k+1} \qquad \cdots\cdots ②$$

が成り立つ．a_{k+1} について整理すると

$$\{(k+2)a_k + 2\}a_{k+1} = 2a_k$$

$$\therefore \quad a_{k+1} = \frac{2a_k}{(k+2)a_k + 2} > 0 \quad (\because \text{ 帰納法の仮定})$$

$n=k+1$ のときも (∗∗) は成り立つ．

(i)(ii) より，すべての自然数 n に対して (∗∗) が成り立つ．すなわち，すべての自然数 n に対して $a_n \neq 0$ である．

- $a_{k+1}=0$ となる自然数 $k+1$ が存在すると仮定すると，① より

$$2(a_k - 0) = (k+2)a_k \cdot 0 \qquad \therefore \quad 2a_k = 0 \qquad \therefore \quad a_k = 0$$

これを繰り返し用いると

$$a_{k+1} = a_k = a_{k-1} = \cdots = a_1 = 0$$

を得る．これは $a_1 = \dfrac{2}{3}$ に反する．

よって，すべての自然数 n に対して $a_n \neq 0$ である．

(3) (2) の結果により，すべての自然数 n に対して，$a_n a_{n+1} \neq 0$ なので，①の辺々を $2a_n a_{n+1}$ で割ると

$$\boldsymbol{\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{n+2}{2}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

を得る．

(4) $n \geqq 2$ のとき，(3) の結果から

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a_n} &= \frac{1}{a_1} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k+2}{2} \\
&= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{(n-1)\{3+(n+1)\}}{2} \\
&= \frac{3}{2} + \frac{(n-1)(n+4)}{4} \\
&= \frac{6 + (n^2+3n-4)}{4} \\
&= \frac{n^2+3n+2}{4} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)}{4}
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad a_n = \frac{4}{(n+1)(n+2)}$$

これは $n=1$ のときも成り立つ．よって

$$\boldsymbol{a_n = \frac{4}{(n+1)(n+2)} \ (n \geqq 1)} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．