数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = \frac{1}{8}, \quad (4n^2-1)(a_n - a_{n+1}) = 8(n^2-1)a_n a_{n+1} \ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

により定める．以下の問いに答えよ．

(1) $a_2,\ a_3$ を求めよ．
(2) $a_n \neq 0$ を示せ．
(3) $\dfrac{1}{a_{n+1}} - \dfrac{1}{a_n}$ を n の式で表せ．
(4) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(23 熊本大 理・工・医 (技術)・薬 1)

【答】

(1) $a_2 = \dfrac{1}{8},\ a_3 = \dfrac{5}{48}$
(2) 略
(3) $\dfrac{1}{a_{n+1}} - \dfrac{1}{a_n} = \dfrac{8(n^2-1)}{4n^2-1}$
(4) $a_n = \dfrac{2n-1}{4n(n+1)}$

【解答】

$$a_1 = \frac{1}{8},$$
$$(4n^2-1)(a_n - a_{n+1}) = 8(n^2-1)a_n a_{n+1} \quad (n \geqq 1) \qquad \cdots\cdots ①$$

(1) $a_1 = \dfrac{1}{8}$，① より

$$3\left(\frac{1}{8} - a_2\right) = 0 \qquad \therefore \quad \boldsymbol{a_2 = \frac{1}{8}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．さらに

$$15\left(\frac{1}{8} - a_3\right) = 8 \cdot 3 \cdot \frac{1}{8} \cdot a_3 \qquad \therefore \quad \frac{5}{8} - 5a_3 = a_3$$
$$\therefore \quad \boldsymbol{a_3 = \frac{5}{48}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) 数学的帰納法を用いて

$$a_n \neq 0 \qquad \cdots\cdots (*)$$

であることを示す．

(i) $n = 1$ のとき，$a_1 = \dfrac{1}{8}$ であるから，$n = 1$ のとき $(*)$ が成り立つ．

(ii) $n = k$ での成立を仮定する．① より

$$(4k^2-1)(a_k - a_{k+1}) = 8(k^2-1)a_k a_{k+1} \qquad \cdots\cdots ②$$

が成り立つ．ここで $a_{k+1} = 0$ と仮定すると，② から

$$(4k^2-1)a_k = 0$$

k は自然数なので $a_k = 0$ となる．これは $a_k \neq 0$ (帰納法の仮定) に反する．したがって，$n = k+1$ のときも $a_{k+1} \neq 0$ である．

(i)(ii) より，すべての自然数 n に対して $a_n \neq 0$ である． $\cdots\cdots$ (証明終わり)

- 数学的帰納法を用いて「$a_n > 0$ …… $(**)$」であることを示してもよい．

  (i) $n=1$ のとき，$a_1 = \dfrac{1}{8}$ であるから，$n=1$ のとき $(**)$ が成り立つ．

  (ii) $n=k$ での成立を仮定する．① より

  $$(4k^2-1)(a_k - a_{k+1}) = 8(k^2-1)a_k a_{k+1} \qquad \cdots\cdots ②$$

  が成り立つ．a_{k+1} について整理すると

  $$\{8(k^2-1)a_k + (4k^2-1)\}a_{k+1} = (4k^2-1)a_k$$

  $$\therefore \quad a_{k+1} = \frac{(4k^2-1)a_k}{8(k^2-1)a_k + (4k^2-1)} > 0 \quad (\because \text{ 帰納法の仮定})$$

  $n=k+1$ のときも $(**)$ は成り立つ．

  (i)(ii) より，すべての自然数 n に対して $(**)$ が成り立つ．すなわち，すべての自然数 n に対して $a_n \neq 0$ である．

- $a_{k+1} = 0$ となる自然数 $k+1$ が存在すると仮定すると，① より

  $$(4k^2-1)(a_k - 0) = 8(k^2-1)\cdot 0 \qquad \therefore \quad (4k^2-1)a_k = 0 \qquad \therefore \quad a_k = 0$$

  これを繰り返し用いると

  $$a_{k+1} = a_k = a_{k-1} = \cdots = a_1 = 0$$

  を得る．これは $a_1 = \dfrac{1}{8}$ に反する．

  よって，すべての自然数 n に対して $a_n \neq 0$ である．

(3) (2) の結果より，すべての自然数 n に対して，$a_n a_{n+1} \neq 0$ なので，①の両辺を $(4n^2-1)a_n a_{n+1}$ で割ると

$$\boldsymbol{\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{8(n^2-1)}{4n^2-1}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

を得る．

(4) $n \geqq 2$ のとき，(3) の結果から

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a_n} &= \frac{1}{a_1} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{8(k^2-1)}{4k^2-1} \\
&= 8 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(2 - \frac{6}{4k^2-1}\right) \\
&= 8 + \sum_{k=1}^{n-1} \left\{2 - 3\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right)\right\} \\
&= 8 + 2(n-1) - 3\left(\frac{1}{2-1} - \frac{1}{2n-1}\right) \\
&= 2n + 6 - 3\cdot\frac{2n-2}{2n-1} \\
&= \frac{(2n+6)(2n-1) - 3(2n-2)}{2n-1} \\
&= \frac{4n^2+4n}{2n-1} \\
\therefore \quad a_n &= \frac{2n-1}{4n(n+1)}
\end{aligned}$$

これは $n=1$ のときも成り立つ．よって

$$\boldsymbol{a_n = \frac{2n-1}{4n(n+1)} \ (n \geqq 1)} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．