数列 $\{a_n\}$ は次の［1］,［2］の条件をみたす.

［1］ $a_1 = 3,$
［2］ $a_n = 2a_{n-1} + 2^n \cdot n - 1 \quad (n = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$

(i) α を定数とし $b_n = a_n + \alpha$ $(n = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$ とおくと，数列 $\{b_n\}$ は関係式

$$b_n = 2b_{n-1} + 2^n \cdot n \quad (n = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

をみたす．このとき α を求めなさい.

(ii) $c_n = \dfrac{b_n}{2^n}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とおくとき，数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めなさい.

(iii) 数列 $\{a_n\}$ の 一般項を求めなさい.

(23 福島大 人間発達文化 3(1))

【答】

(i) $\alpha = -1$

(ii) $c_n = \dfrac{n(n+1)}{2} \quad (n \geqq 1)$

(iii) $a_n = 2^{n-1}n(n+1) + 1$

【解答】

［1］ $a_1 = 3,$
［2］ $a_n = 2a_{n-1} + 2^n \cdot n - 1 \quad (n \geqq 2)$

(i) $a_n = b_n - \alpha$ を［2］に代入すると

$$b_n - \alpha = 2(b_{n-1} - \alpha) + 2^n \cdot n - 1$$
$$\therefore \quad b_n = 2b_{n-1} + 2^n \cdot n - \alpha - 1 \qquad \cdots\cdots ①$$

これが $n \geqq 2$ をみたすすべての n に対して

$$b_n = 2b_{n-1} + 2^n \cdot n \qquad \cdots\cdots ②$$

をみたすのは ①, ② の辺々を引くと

$$0 = -\alpha - 1 \qquad \therefore \quad \boldsymbol{\alpha = -1} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である.

(ii) $b_n = 2^n \cdot c_n$ を ② に代入すると

$$2^n \cdot c_n = 2 \cdot 2^{n-1} \cdot c_{n-1} + 2^n \cdot n$$
$$\therefore \quad c_n = c_{n-1} + n$$

$c_1 = \dfrac{b_1}{2} = \dfrac{a_1 - 1}{2} = \dfrac{3-1}{2} = 1$ であるから，$n \geqq 2$ のとき

$$c_n = c_1 + \sum_{k=2}^{n} k = 1 + \sum_{k=2}^{n} k = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

これは $n = 1$ のときも成り立つ．よって

$$\boldsymbol{c_n = \frac{n(n+1)}{2} \quad (n \geqq 1)} \qquad \cdots\cdots(答)$$

(iii) (ii) より

$$b_n = 2^n \cdot c_n = 2^{n-1} \cdot n(n+1)$$

であるから

$$a_n = b_n + 1 = \boldsymbol{2^{n-1} \cdot n(n+1) + 1} \quad (n \geqq 1) \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- (i)(ii) の誘導を無視して一般項を求めてみよう．
  ［2］の形から，$n \geqq 2$ を満たすすべての整数に対して

  $$\alpha(n) = 2\alpha(n-1) + 2^n \cdot n - 1 \qquad \cdots\cdots ㋐$$

  を満たす n の関数 $\alpha(n)$ をみつける．$p,\ q,\ r,\ s$ を定数とし $\alpha(n) = 2^n \cdot (pn^2 + qn + r) + s$ とおくと

  $$\begin{aligned} &2\alpha(n-1) + 2^n \cdot n - 1 \\ &= 2 \cdot \{2^{n-1} \cdot (p(n-1)^2 + q(n-1) + r) + s\} + 2^n \cdot n - 1 \\ &= 2^n \cdot \{p(n^2 - 2n + 1) + q(n-1) + r + n\} + 2s - 1 \\ &= 2^n \cdot \{pn^2 + (-2p + q + 1)n + (p - q + r)\} + 2s - 1 \end{aligned}$$

  ㋐ について，辺々の係数を比較すると

  $$\begin{cases} p = p \\ q = -2p + q + 1 \\ r = p - q + r \\ s = 2s - 1 \end{cases} \qquad \therefore \quad p = \frac{1}{2},\ q = \frac{1}{2},\ s = 1,\ (r \text{ は任意})$$

  r は任意にとることができるので，$r = 0$ とすると

  $$\alpha(n) = 2^n \cdot \left(\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}\right) + 1 = 2^{n-1} \cdot n(n+1) + 1$$

  となる．この $\alpha(n)$ を用いて，［2］と ㋐ の辺々を引くと

  $$a_n - \alpha(n) = 2(a_{n-1} - \alpha(n-1))$$

  数列 $a_n - \alpha(n)$ は初項 $a_1 - \alpha(1) = 3 - \{2^0 \cdot 1 \cdot (1+1) + 1\} = 3 - 3 = 0$，公比 2 の等比数列であるから

  $$a_n - \alpha(n) = 0 \cdot 2^{n-1}$$

  $$\therefore \quad a_n = \alpha(n) = 2^{n-1} \cdot n(n+1) + 1 \quad (n \geqq 1)$$

  である．