数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とおく．等式

$$3a_n = S_n + n^2 - 2n + 1 \ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

が成り立つとき，次の各問に答えよ．

(1) a_1，a_2，a_3 を求めよ．
(2) a_{n+1} を a_n と n の式で表せ．
(3) $b_n = a_{n+1} - a_n$ とおくとき，数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．
(4) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(23 茨城大 教育 4)

【答】

(1) $a_1 = 0,\ a_2 = \dfrac{1}{2},\ a_3 = \dfrac{9}{4}$

(2) $a_{n+1} = \dfrac{3}{2}a_n + n - \dfrac{1}{2}$

(3) $b_n = \dfrac{5}{2}\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1} - 2$

(4) $a_n = 5\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1} - 2n - 3$

【解答】

$$3a_n = S_n + (n-1)^2 \ (n \geqq 1) \qquad \cdots\cdots ①$$

(1) ① において，$n = 1,\ 2,\ 3$ を順次代入すると

$$3a_1 = a_1 + 0^2 = a_1 \qquad \therefore\ \boldsymbol{a_1 = 0} \qquad \cdots\cdots(答)$$

$$3a_2 = (0 + a_2) + 1^2 = a_2 + 1 \qquad \therefore\ \boldsymbol{a_2 = \frac{1}{2}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

$$3a_3 = \left(0 + \frac{1}{2} + a_3\right) + 2^2 \qquad \therefore\ \boldsymbol{a_3 = \frac{9}{4}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

を得る．

(2) ① において，n を $n+1$ とすると

$$3a_{n+1} = S_{n+1} + n^2 \qquad \cdots\cdots ①'$$

である．① と ①$'$ の辺々を引くと

$$3a_{n+1} - 3a_n = a_{n+1} + 2n - 1 \quad (\because\ S_{n+1} - S_n = a_{n+1})$$

$$\therefore\ \boldsymbol{a_{n+1} = \frac{3}{2}a_n + n - \frac{1}{2}} \qquad \cdots\cdots ② \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(3) ② において，n を $n+1$ とすると

$$a_{n+2} = \frac{3}{2}a_{n+1} + n + \frac{1}{2} \qquad \cdots\cdots ②'$$

である．② と ②$'$ の辺々を引くと

$$a_{n+2} - a_{n+1} = \frac{3}{2}(a_{n+1} - a_n) + 1$$

である．$b_n = a_{n+1} - a_n$ とおくと

$$b_{n+1} = \frac{3}{2}b_n + 1$$

を得る．これは

$$b_{n+1}+2=\frac{3}{2}(b_n+2)$$

と変形される．数列 $\{b_n+2\}$ は初項 $b_1+2=(a_2-a_1)+2=\left(\frac{1}{2}-0\right)+2=\frac{5}{2}$，公比 $\frac{3}{2}$ の等比数列であるから，$\{b_n\}$ の一般項は

$$b_n+2=\frac{5}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{b_n=\frac{5}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}-2} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(4) $n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= 0+\sum_{k=1}^{n-1}\left\{\frac{5}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}-2\right\} \\ &= \frac{5}{2}\cdot\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}-1}{\frac{3}{2}-1}-2(n-1) \\ &= 5\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}-2n-3 \end{aligned}$$

これは $n=1$ でも成り立つ．

よって，$\{a_n\}$ の一般項は

$$\boldsymbol{a_n=5\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}-2n-3\quad (n \geqq 1)} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

- 漸化式 ②：$a_{n+1}=\frac{3}{2}a_n+n-\frac{1}{2}$ を次のように解くこともできる．

$$\alpha(n+1)=\frac{3}{2}\alpha(n)+n-\frac{1}{2} \qquad \cdots\cdots ②''$$

をみたす自然数 n の関数 $\alpha(n)$ をみつける．$\alpha(n)$ がみつかると，② と ②$''$ の辺々を引くことにより

$$a_{n+1}-\alpha(n+1)=\frac{3}{2}\{a_n-\alpha(n)\}$$

と変形することができる．

$\alpha(n)$ として，1 次の一般式 $\alpha(n)=pn+q$ ($p,\ q$ は定数) とおくと，②$''$ は

$$p(n+1)+q=\frac{3}{2}(pn+q)+n-\frac{1}{2}$$

$$\therefore\quad pn+p+q=\left(\frac{3}{2}p+1\right)n+\frac{3}{2}q-\frac{1}{2}$$

これがすべての自然数 n について成り立つ条件は

$$\begin{cases} p=\frac{3}{2}p+1 \\ p+q=\frac{3}{2}q-\frac{1}{2} \end{cases} \qquad \therefore\quad p=-2,\ q=-3$$

である．したがって，$\alpha(n)=-2n-3$ を用いると ② は次のように変形される．

$$a_{n+1}+2(n+1)+3=\frac{3}{2}(a_n+2n+3)$$

$$\therefore\quad a_n+2n+3=(0+2+3)\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\quad a_n=5\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}-2n-3$$

である．