数列 $\{a_n\}$ が $a_1=\dfrac{1}{2}$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{a_n+2}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ により定められている．

(1) $b_n=\dfrac{1}{a_n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とおくと，$b_{n+1}=\boxed{\text{コ}}b_n+\boxed{\text{サ}}$ である．

(2) $a_n=\dfrac{1}{\boxed{\text{シ}}\cdot\boxed{\text{ス}}^{n-1}-\boxed{\text{セ}}}$ である．

(3) $a_n<0.001$ を満たす最小の自然数 n は $\boxed{\text{ソタ}}$ である．

(23 金沢工大 3)

【答】

コ	サ	シ	ス	セ	ソタ
2	1	3	2	1	10

【解答】

$$a_1=\frac{1}{2},\ a_{n+1}=\frac{a_n}{a_n+2}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \qquad \cdots\cdots ①$$

(1) $a_1=\dfrac{1}{2}>0$ である．さらに，$a_k>0$ を仮定すると $a_{k+1}=\dfrac{a_k}{a_k+2}>0$ なので，数学的帰納法により任意の n に対して $a_n>0$ である．① の辺々の逆数をとると

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{a_n+2}{a_n}=\frac{2}{a_n}+1$$

$b_n=\dfrac{1}{a_n}$ とおくと

$$b_{n+1}=\mathbf{2}b_n+\mathbf{1} \qquad \cdots\cdots ② \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) ② は次のように変形できる．

$$b_{n+1}+1=2(b_n+1)$$

数列 $\{b_n+1\}$ は初項 $b_1+1=\dfrac{1}{a_1}+1=2+1=3$，公比 2 の等比数列であるから

$$b_n+1=3\cdot2^{n-1}$$

$$\therefore\quad \frac{1}{a_n}=3\cdot2^{n-1}-1$$

となる．したがって

$$a_n=\frac{1}{\boldsymbol{3\cdot2^{n-1}-1}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(3) $$a_n<0.001 \iff b_n>1000$$

である．$b_n=3\cdot2^{n-1}-1$ は増加列であり，$b_9=3\cdot2^8-1=767$，$b_{10}=3\cdot2^9-1=1535$ であるから，$a_n<0.001$ を満たす最小の n は

$$n=\mathbf{10} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．