xy 平面の第 1 象限に中心がある半径 r_n の円 C_n $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ を次の規則で定める．

- 円 C_n の中心の座標を $(x_n,\ r_n)$ とする．
- $(x_1,\ r_1)=(1,\ 1),\ r_2=\dfrac{1}{4}$ とする．
- 円 C_2 は円 C_1 と外接し，$x_2>1$ とする．
- 3 以上の自然数 n に対して，円 C_n は，円 C_1 と円 C_{n-1} に外接し，$x_n<x_{n-1}$ とする．

このとき，次の問いに答えよ．

(1) x_2 を求めよ．
(2) $x_{n-1}-x_n=2\sqrt{r_{n-1}r_n}$ $(n=3,\ 4,\ \cdots)$ を示せ．
(3) $\sqrt{r_{n-1}}-\sqrt{r_n}=\sqrt{r_{n-1}r_n}$ $(n=3,\ 4,\ \cdots)$ を示せ．
(4) $n\geqq 3$ のとき，r_n を n を用いて表せ．

(23 富山大 後 理 (数) 3)

【答】
(1) $x_2=2$
(2) 略
(3) 略
(4) $r_n=\dfrac{1}{n^2}$

【解答】

(1) $C_1:(x-1)^2+(y-1)^2=1$

$$C_2:(x-x_2)^2+\left(y-\frac{1}{4}\right)^2=\left(\frac{1}{4}\right)^2$$

C_2 は C_1 と外接するから，この 2 円について

(中心間の距離) = (半径の和)

が成り立つ．

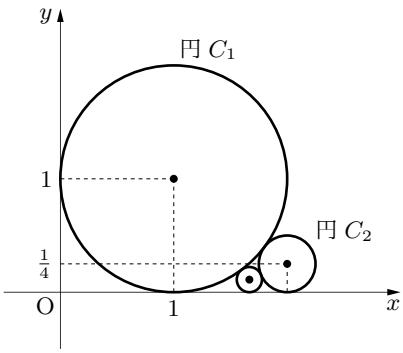
$$(x_2-1)^2+\left(1-\frac{1}{4}\right)^2=\left(1+\frac{1}{4}\right)^2$$

$$\therefore\quad (x_2-1)^2=1$$

$x_2>1$ であるから

$$\boldsymbol{x_2=2} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．



(2) $n\geqq 3$ について，2 円 C_{n-1} と C_n は外接するから

$$(x_{n-1}-x_n)^2+(r_{n-1}-r_n)^2=(r_n+r_{n-1})^2$$

$$\therefore\quad (x_{n-1}-x_n)^2=4r_nr_{n-1}$$

$x_{n-1}>x_n$ であるから

$$x_{n-1}-x_n=2\sqrt{r_{n-1}r_n} \qquad \cdots\cdots ①$$

が成り立つ． $\cdots\cdots$ (証明終わり)

- 円 C_2 は円 C_1 と外接し，3 以上の自然数 n に対して円 C_n は円 C_{n-1} に外接する．すなわち，2 以上の自然数 n に対して円 C_n は円 C_{n-1} に外接するから，この等式は 2 以上の自然数 n に対して成り立つ．

(3) 円 C_2 は円 C_1 と外接し，3 以上の自然数 n に対して円 C_n は円 C_1 と円 C_{n-1} に外接するから，$n \geqq 3$ について，3 円 C_n，円 C_{n-1}，円 C_1 は互いに外接する．

$$\begin{cases} ① \\ (x_n-1)^2+(1-r_n)^2=(1+r_n)^2 \\ (x_{n-1}-1)^2+(1-r_{n-1})^2=(1+r_{n-1})^2 \end{cases}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} ① \\ (x_n-1)^2=4r_n \\ (x_{n-1}-1)^2=4r_{n-1} \end{cases}$$

である．$x_{n-1}>x_n>x_1=1$ であるから

$$\begin{cases} ① \\ x_n=1+2\sqrt{r_n} \\ x_{n-1}=1+2\sqrt{r_{n-1}} \end{cases}$$

が得られる．第 2，第 3 式を ① に代入すると

$$(1+2\sqrt{r_{n-1}})-(1+2\sqrt{r_n})=2\sqrt{r_{n-1}r_n}$$

$$\therefore \quad \sqrt{r_{n-1}}-\sqrt{r_n}=\sqrt{r_{n-1}r_n} \quad (n \geqq 3)$$

が得られる． ……(証明終わり)

- $r_1=1,\ r_2=\dfrac{1}{4}$ より，この式は $n=2$ のときも成り立つ．

(4) $r_{n-1}>0,\ r_n>0$ であるから (3) の辺々を $\sqrt{r_{n-1}r_n}$ で割ると

$$\frac{1}{\sqrt{r_n}}-\frac{1}{\sqrt{r_{n-1}}}=1 \qquad \cdots\cdots ㋐$$

$n \geqq 3$ のとき，数列 $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{r_n}}\right\}$ は初項 $\dfrac{1}{\sqrt{r_2}}=2$，公差 1 の等差数列であるから

$$\frac{1}{\sqrt{r_n}}=2+(n-2)$$

$$\frac{1}{\sqrt{r_n}}=n \qquad \therefore \quad \boldsymbol{r_n=\frac{1}{n^2}} \quad (n \geqq 2)$$ ……(答)

- ㋐は $n \geqq 2$ で成り立つ式であり，$r_1=1$ であるから，(4) の結果は $n \geqq 1$ の範囲で成り立つ．もちろん，問題文は $n \geqq 3$ のときの r_n を求めているということから「$r_n=\dfrac{1}{n^2}$ $(n \geqq 3)$」としてもよい．