整数の組 $(x,\ y,\ z)$ が次の 2 つの式をともに満たすとき，$(x,\ y,\ z)$ は $(*)$ を満たす整数の組であるという．

$$(*)\quad x^2+y^2+z^2-3xyz=0,\quad 0<x<y<z$$

例えば，$(1,\ 2,\ 5)$ は $(*)$ を満たす整数の組である．

(1) $(2,\ 5,\ a)$ が $(*)$ を満たす整数の組となるような整数 a を求めよ．

(2) 次の条件 (i)，(ii) をともに満たす数列 $\{a_n\}$ が存在することを示せ．

(i) $a_1=1,\ a_2=2$ である．

(ii) 任意の自然数 n に対して，$(a_n,\ a_{n+1},\ a_{n+2})$ は $(*)$ を満たす整数の組である．

(3) (2) の数列 $\{a_n\}$ はただ 1 つである．この数列 $\{a_n\}$ について，a_n が偶数となる n をすべて求めよ．

(23 山梨大 後 医 4)

【答】

(1) $a=29$

(2) 略

(3) $n=4k+2\ (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$

【解答】

$$(*)\quad x^2+y^2+z^2-3xyz=0,\quad 0<x<y<z$$

(1) $(2,\ 5,\ a)$ が $(*)$ を満たすとき

$$\begin{cases}2^2+5^2+a^2-3\cdot2\cdot5\cdot a=0\\5<a\end{cases}$$

$$\begin{cases}a^2-30a+29=0\\5<a\end{cases}$$

$$\begin{cases}(a-1)(a-29)=0\\5<a\end{cases}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{a=29}$$ ……(答)

である．

(2) $(a_k,\ a_{k+1},\ a_{k+2})$ が $(*)$ を満たす整数の組であるならば

$$\begin{cases}{a_k}^2+{a_{k+1}}^2+{a_{k+2}}^2-3a_ka_{k+1}a_{k+2}=0 & \cdots\cdots ①\\0<a_k<a_{k+1}<a_{k+2} & \cdots\cdots ②\end{cases}$$

が成り立つ．ここで，z についての 2 次方程式

$${a_{k+1}}^2+{a_{k+2}}^2+z^2-3a_{k+1}a_{k+2}z=0$$

$$\therefore\quad z^2-3a_{k+1}a_{k+2}z+{a_{k+1}}^2+{a_{k+2}}^2=0 \qquad \cdots\cdots ③$$

を考える．①より，$z=a_k$ は ③ の解の 1 つである．③のもう 1 つの解を α とおくと，解と係数の関係より

$$\alpha+a_k=3a_{k+1}a_{k+2}$$

$$\therefore\quad \alpha=3a_{k+1}a_{k+2}-a_k$$

である．a_k，a_{k+1}，a_{k+2} は整数なので，この α も整数である．このとき

$$\begin{aligned}\alpha - a_{k+2} &= (3a_{k+1}a_{k+2} - a_k) - a_{k+2}\\ &= (3a_{k+1} - 1)a_{k+2} - a_k\\ &> (3a_k - 1)a_k - a_k \quad (\because\ a_{k+1} > a_k \geqq 1)\\ &= a_k(3a_k - 2)\\ &> 0 \quad (\because\ a_k \geqq 1)\end{aligned}$$

である．よって，$a_{k+2} < \alpha$ が成り立つ．

また，$a_1 = 1$，$a_2 = 2$ のとき，$(a_1,\ a_2,\ a_3)$ は $(*)$ を満たすから

$$\begin{aligned}&1^2 + 2^2 + {a_3}^2 - 3 \cdot 1 \cdot 2a_3 = 0\\ &{a_3}^2 - 6a_3 + 5 = 0\\ &(a_3 - 1)(a_3 - 5) = 0\end{aligned}$$

$0 < a_1 < a_2 < a_3$ を満たすのは $2 < a_3$ のときであるから

$$a_3 = 5$$

である．

以上から，漸化式

$$(**)\begin{cases} a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 5 \\ a_{n+3} = 3a_{n+1}a_{n+2} - a_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \end{cases}$$

によって定義される数列 $\{a_n\}$ は条件 (i)，(ii) をともに満たす数列であり，条件 (i)，(ii) をともに満たす数列 $\{a_n\}$ は存在する．　……(証明終わり)

(3) (2) の漸化式 $(**)$ の各項の偶奇を調べる．

第 2 式より a_n，a_{n+1}，a_{n+2} の偶奇が決まれば，a_{n+3} の偶奇が決まり，第 1 式より $(a_1,\ a_2,\ a_3) = $ (奇，偶，奇) であるから

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\cdots$
a_n	奇	偶	奇	奇	奇	偶	奇	奇	奇	偶	

となり，数列 $\{a_n\}$ の偶奇は周期 4 で

奇数，偶数，奇数，奇数

と繰り返す．よって，a_n が偶数となる n は

$$\boldsymbol{n = 4k + 2\ (k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)}$$ ……(答)

である．