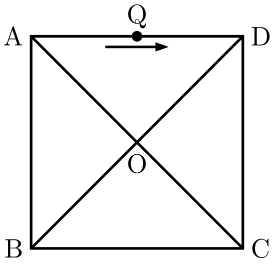
正方形 ABCD の 2 つの対角線の交点を O とする．正方形 ABCD の 4 つの辺と 2 つの対角線上を，次の決まり (ア), (イ), (ウ) に従って移動する点を Q とする．



(ア) 点 Q が交点 O 上にあるとき，移動開始の合図があると，点 Q は頂点 A, B, C, D のいずれかに移動して止まる．各頂点に移動する確率はそれぞれ $\dfrac{1}{4}$ である．

(イ) 点 Q が頂点 A, B, C, D のいずれかの上にあるとき．移動開始の合図があると，点 Q は隣接する 2 つの頂点※ あるいは交点 O に移動して止まる．各頂点および交点 O に移動する確率はそれぞれ $\dfrac{1}{3}$ である．

※ 例えば，頂点 A の隣接する 2 つの頂点は B と D である．

(ウ) 点 Q は頂点 A, B, C, D，または交点 O 上にしか止まらない．また，点 Q が止まっているときにのみ合図が 1 回あり，合図が終わってから点 Q は移動を開始する．

n 回目の合図のあとに点 Q が止まり，$n+1$ 回目の合図の前に，点 Q が交点 O 上にある確率を P_n とする．ただし，n は正の整数であり，各移動はそれぞれ独立であるとする．

(1) はじめに点 Q が交点 O 上にあるとする．

(i) P_1, P_2 の値をそれぞれ求めなさい．

(ii) P_{n+1} を P_n の式で表しなさい．ただし，n 回目の合図のあと，$n+1$ 回目の合図の前に，点 Q が頂点 A, B, C, D のいずれかの上にある確率は等しいことを用いてよい．

(iii) P_n を n の式で表しなさい．

(2) はじめに点 Q が頂点 A 上にあるとする．

(i) P_1, P_2 の値をそれぞれ求めなさい．

(ii) $n=2m$ とする．合計 n 回の合図によるすべての移動において，点 Q が正方形 ABCD のいずれかの辺を少なくとも 1 回通り，かつ，交点 O に少なくとも 1 回止まる確率を m の式で表しなさい．ただし，m は正の整数である．

(23 帯広畜産大 2)

【答】

(1) (i) $P_1=0$, $P_2=\dfrac{1}{3}$ (ii) $P_{n+1}=\dfrac{1}{3}(1-P_n)$ (iii) $P_n=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

(2) (i) $P_1=\dfrac{1}{3}$, $P_2=\dfrac{2}{9}$ (ii) $1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^m-\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2m}$

【解答】

(1) はじめに点 Q が交点 O 上にある．

(i) 1 回目の移動のあと点 Q は頂点 A, B, C, D のいずれかの上にある (O 上にはない) から

$$\boldsymbol{P_1=0}$$ ……(答)

である．

1 回目の移動のあと点 Q は頂点 A，B，C，D のいずれかの上にあり，2 回目の移動のあとはいずれの場合も確率 $\frac{1}{3}$ で交点 O の上に移動するから

$$\boldsymbol{P_2 = \frac{1}{3}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(ii) 点 Q が $n+1$ 回目の移動のあとで交点 O 上にあるのは，点 Q が n 回目の移動のあとは頂点 A，B，C，D のいずれかの上にあり (確率 $1-P_n$)，$n+1$ 回目の移動で交点 O 上に移動するときである $\left(確率\ \frac{1}{3}\right)$ から

$$P_{n+1} = (1-P_n)\cdot\frac{1}{3}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{P_{n+1} = \frac{1}{3}(1-P_n)} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(iii) (ii) の式は

$$P_{n+1} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{3}\left(p_n - \frac{1}{4}\right)$$

と変形される．数列 $\left\{P_n - \frac{1}{4}\right\}$ は初項 $P_1 - \frac{1}{4} = 0 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$，公比 $-\frac{1}{3}$ の等比数列であるから

$$P_n - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{P_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) はじめに点 Q が頂点 A 上にある．

(i) 1 回目の移動のあと点 Q が交点 O 上に移動する確率は $\frac{1}{3}$ であるから

$$\boldsymbol{P_1 = \frac{1}{3}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

2 回目の移動のあと点 Q が交点 O 上に移動するのは，1 回目の移動のあと点 Q が頂点 B，D のいずれかの上に移動し 2 回目の移動のあと点 Q が交点 O 上に移動するときであるから

$$\boldsymbol{P_2} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} = \boldsymbol{\frac{2}{9}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(ii) $2m$ 回の移動のあとまでに点 Q が

正方形 ABCD のいずれかの辺を少なくとも 1 回通るという事象を S，
交点 O に少なくとも 1 回止まるという事象を I

とおく．求める確率は

$$\begin{aligned} P(S\cap I) &= 1 - P(\overline{S\cap I}) = 1 - P(\overline{S}\cup\overline{I}) \\ &= 1 - \{P(\overline{S}) + P(\overline{I}) - P(\overline{S}\cap\overline{I})\} \end{aligned}$$

$\overline{S}\cap\overline{I}$ は空事象であるから

$$P(S\cap I) = 1 - P(\overline{S}) - P(\overline{I})$$

である．

(ア) $P(\overline{S})$ について

$\overline{S}$ は正方形の辺を 1 度も通らないという事象であるから，Q は対角線のみを $2m$ 回移動する.「ひとつの頂点から確率 $\dfrac{1}{3}$ で交点 O に移動し，交点 O から確率 1 でいずれかひとつの頂点に移動する」ことを m 回繰り返すから

$$P(\overline{S}) = \left(\frac{1}{3}\cdot 1\right)^m = \left(\frac{1}{3}\right)^m$$

である.

(イ) $P(\overline{I})$ について

$\overline{I}$ は交点 O を 1 回も止まらないという事象であるから，Q は辺のみを $2m$ 回の移動する.「ひとつの頂点から他の頂点に確率 $\dfrac{2}{3}$ で移動する」ことを $2m$ 回繰り返すから

$$P(\overline{I}) = \left(\frac{2}{3}\right)^{2m}$$

である.

以上 (ア)(イ) より，求める確率 $P(S\cap I)$ は

$$P(S\cap I) = \boldsymbol{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{m}-\left(\frac{2}{3}\right)^{2m}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である.