自然数からなる 2 つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を

$$(3+2\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める．次の問いに答え．

(1) すべての自然数 n に対して，a_n は奇数，b_n は偶数であることを示せ．

(2) すべての自然数 n に対して，

$$1+2+3+\cdots+\frac{a_n-3}{2}+\frac{a_n-1}{2}=1+3+5+\cdots+(b_n-3)+(b_n-1)$$

が成立することを示せ．

(23 琉球大 後 理 (数理) 3)

【答】

(1) 略

(2) 略

【解答】

$$(3+2\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2} \quad (n \geqq 1)$$

(1) すべての自然数 n に対して

「a_n は奇数, b_n は偶数である」　　…… $(*)$

ことを数学的帰納法で示す.

(i) $n=1$ のとき

$$a_1 + b_1\sqrt{2} = 3+2\sqrt{2}$$

a_1，b_1 は自然数なので $a_1=3$，$b_n=2$ であり，$(*)$ は成り立つ．

(ii) $n=k$ での成立を仮定する．

$$(3+2\sqrt{2})^{k+1} = (3+2\sqrt{2})^k(3+2\sqrt{2})$$

$$a_{k+1}+b_{k+1}\sqrt{2} = (a_k+b_k\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})$$

$$\therefore\quad a_{k+1}+b_{k+1}\sqrt{2} = 3a_k+4b_k+(2a_k+3b_k)\sqrt{2}$$

a_k，b_k，a_{k+1}，b_{k+1} は自然数で，$\sqrt{2}$ は無理数なので，次の漸化式を得る．

$$\begin{cases} a_{k+1} = 3a_k+4b_k \\ b_{k+1} = 2a_k+3b_k \end{cases} \qquad \cdots\cdots ①$$

帰納法の仮定により，a_k が奇数で b_k が偶数であるから

$3a_k$ は奇数，$4b_k$ は偶数なので，a_{k+1} は奇数である．

$2a_k$ は偶数で，$3b_k$ も偶数なので，b_{k+1} は偶数である．

したがって $n=k+1$ のときも $(*)$ は成り立つ．

(i)，(ii) より，すべての自然数 n について，$(*)$ は成り立つ．　　…… (証明終わり)

(2) 辺々整理すると

$$1+2+3+\cdots+\frac{a_n-3}{2}+\frac{a_n-1}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{a_n-1}{2}\left(\frac{a_n-1}{2}+1\right)=\frac{{a_n}^2-1}{8}$$

$$1+3+5+\cdots+(b_n-3)+\underset{\frac{b_n}{2}\text{番目の奇数}}{(b_n-1)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{b_n}{2}\{1+(b_n-1)\}=\frac{{b_n}^2}{4}$$

なので，与えられた等式が成り立つことを示すには

$$\frac{{a_n}^2-1}{8}=\frac{{b_n}^2}{4}\text{，すなわち「}{a_n}^2-2{b_n}^2=1\text{」}\qquad\cdots\cdots(**)$$

がすべての自然数 n に対して成り立つことを示せばよい．$(**)$ が成り立つことを数学的帰納法で証明する．

(i) $n=1$ のとき，$a_1=3,\ b_1=2$ より

$${a_1}^2-2{b_1}^2=3^2-2\cdot 2^2=1$$

であり，$(**)$ は成り立つ．

(ii) $n=k$ での成立を仮定する．

$$\begin{aligned}{a_{k+1}}^2-2{b_{k+1}}^2&=(3a_k+4b_k)^2-2(2a_k+3b_k)^2\quad(\because\ ①)\\&={a_k}^2-2{b_k}^2\\&=1\quad(\because\ \text{帰納法の仮定})\end{aligned}$$

となり，$n=k+1$ のときも $(**)$ は成り立つ．

よって，すべての自然数 n に対して $(**)$ は成り立つから，与えられた等式もすべての自然数に対して成り立つ．　……(証明終わり)