赤球が 1 個，白球が 2 個入った袋から球を 1 個取り出して，その色を見てから袋に戻すという試行を，白球が 2 回続けて出るまで行う．n 回目に白球を取り出しまだ試行が終わらない確率を p_n，n 回目に赤球を取り出す確率を q_n とする．次の問いに答えよ．

(1) p_{n+1}，q_{n+1} を p_n，q_n を用いて表せ．
(2) $a_n = p_n - q_n$ とするとき，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．
(3) $b_n = (-3)^n p_n$ とするとき，数列 $\{b_n\}$ 求めよ．
(4) $n+1$ 回目で試行が終わる確率を求めよ．

(23 琉球大 後 理 (数理) 4)

【答】

(1) $p_{n+1} = \dfrac{2}{3}q_n$，$q_{n+1} = \dfrac{1}{3}(p_n + q_n)$
(2) $a_n = -\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$
(3) $b_n = \dfrac{2}{3}(-2)^n - \dfrac{2}{3}$
(4) $\dfrac{4}{9}\left\{\left(\dfrac{2}{3}\right)^n - \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n\right\}$

【解答】

p_n：n 回目に白球を取り出しまだ試行が終わらない確率
q_n：n 回目に赤球を取り出す確率

(1) $n+1$ 回目に白球を取り出しまだ試行が終わらないのは，n 回目に赤球を取り出し $n+1$ 回目に白球を取り出すときであるから

$$p_{n+1} = q_n \cdot \frac{2}{3} = \boldsymbol{\frac{2}{3}q_n} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

$n+1$ 回目に赤球を取り出すのは，n 回目まで試行が続いた後，赤球を取り出すときであるから

$$q_{n+1} = (p_n + q_n) \cdot \frac{1}{3} = \boldsymbol{\frac{1}{3}(p_n + q_n)} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) $a_n = p_n - q_n$ とすると

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= p_{n+1} - q_{n+1} \\ &= \frac{2}{3}q_n - \frac{1}{3}(p_n + q_n) \quad (\because\ (1)) \\ &= -\frac{1}{3}(p_n - q_n) \\ &= -\frac{1}{3}a_n \end{aligned}$$

が成立する．$\{a_n\}$ は初項 $p_1 - q_1 = \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3}$，公比 $-\dfrac{1}{3}$ の等比数列であり

$$a_n = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \boldsymbol{-\left(-\frac{1}{3}\right)^n} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) (1)，(2) の結果から

$$p_{n+1} = \frac{2}{3}q_n = \frac{2}{3}(p_n - a_n) = \frac{2}{3}p_n + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

両辺に $(-3)^{n+1}$ を掛けると

$$(-3)^{n+1}p_{n+1} = -2\cdot(-3)^n p_n - 2$$

$b_n = (-3)^n p_n$ とすると，$\{b_n\}$ は

$$b_{n+1} = -2b_n - 2$$

を満たす．

$$b_{n+1} + \frac{2}{3} = -2\left(b_n + \frac{2}{3}\right)$$

と変形される．$\left\{b_n + \frac{2}{3}\right\}$ は初項 $b_1 + \frac{2}{3} = -3p_1 + \frac{2}{3} = -3\cdot\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = -\frac{4}{3}$，公比 -2 の等比数列であり

$$b_n + \frac{2}{3} = -\frac{4}{3}(-2)^{n-1}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{b_n = \frac{2}{3}(-2)^n - \frac{2}{3}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(4) 上の結果から

$$p_n = \frac{b_n}{(-3)^n} = \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^n = \frac{2}{3}\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}$$

求める確率は，n 回目に白球を取り出しまだ試行が終わらず，$n+1$ 回目に白球を取り出す確率なので

$$p_n\cdot\frac{2}{3} = \boldsymbol{\frac{4}{9}\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- (2)(3) の誘導がなくても p_n，q_n の一般項を求められるようにしておきたい．
  1 文字消去して 3 項間漸化式に持ち込んでもよいが，$\{p_n + \alpha q_n\}$ が等比数列となる定数 α を求めることから始めてもよい．

$$\begin{aligned} p_{n+1} + \alpha q_{n+1} &= \frac{2}{3}q_n + \frac{\alpha}{3}(p_n + q_n) = \frac{\alpha}{3}p_n + \frac{\alpha+2}{3}q_n \\ &= \frac{\alpha}{3}\left(p_n + \frac{\alpha+2}{\alpha}q_n\right) \end{aligned}$$

$\alpha = \dfrac{\alpha+2}{\alpha}$ を解くと

$$\alpha^2 - \alpha - 2 = 0 \qquad \therefore\quad (\alpha-2)(\alpha+1) = 0 \qquad \therefore\quad \alpha = 2,\ -1$$

これにより

$$p_{n+1} + 2q_{n+1} = \frac{2}{3}(p_n + 2q_n),$$

$$p_{n+1} - q_{n+1} = -\frac{1}{3}(p_n - q_n) \quad ((2)\text{ の誘導になっている})$$

という 2 通りの漸化式が得られる．それぞれは

$$p_n + 2q_n = \left(\frac{2}{3} + 2\cdot\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n,$$

$$p_n - q_n = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} = -\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

となり

$$p_n = \frac{2}{3}\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\},\quad q_n = \frac{1}{3}\left\{2\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}$$

を得る．