K を自然数とする．2 つの箱 A と B があり，A に赤玉 1 個，B に白玉 K 個が入っている．A の中の 1 個の玉と B の中の 1 個の玉の交換を繰り返し行う．n 回目の交換が終わったときに A の中の玉が赤玉である確率を求めよ．

(23 金沢大 理系 3)

【答】 $\dfrac{1}{K+1}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{K}\right)^{n-1}\right\}$

【解答】

n 回目の交換が終わったときに A の中の玉が赤である確率を p_n とおく．

1 回目の交換が終わったとき，赤玉は B の中にあるので

$$p_1 = 0$$

である．

$n+1$ 回目の交換が終わったとき，A の中の玉が赤玉がにあるのは

「n 回目の交換が終わったとき，A の中の玉が白玉で
$n+1$ 回目の交換で A の中の白玉と B の中の赤玉を交換する」

ときであるから

$$p_{n+1} = (1-p_n)\frac{1}{K} \quad (n \geqq 1) \qquad \cdots\cdots ①$$

が成り立つ．$\alpha = (1-\alpha)\dfrac{1}{K}$ を解くと $\alpha = \dfrac{1}{K+1}$ であり，① は

$$p_{n+1} - \frac{1}{K+1} = -\frac{1}{K}\left(p_k - \frac{1}{K+1}\right)$$

と変形される．数列 $\left\{p_k - \dfrac{1}{K+1}\right\}$ は初項 $0 - \dfrac{1}{K+1} = -\dfrac{1}{K+1}$，公比 $-\dfrac{1}{K}$ の等比数列であるから

$$p_k - \frac{1}{K+1} = -\frac{1}{K+1}\left(-\frac{1}{K}\right)^{n-1}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{p_k = \frac{1}{K+1}\left\{1-\left(-\frac{1}{K}\right)^{n-1}\right\}} \quad (n \geqq 1) \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．