数直線上で座標が整数である点を移動する点 P がある．時刻 $n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ での点 P の位置は次の規則に従うとする．

(i) 時刻 0 での点 P の座標は 0 である．
(ii) 時刻 n での点 P の座標 x が偶数であるとき，時刻 $n+1$ での点 P の座標は確率 $\dfrac{2}{3}$ で $x+1$ となり，確率 $\dfrac{1}{3}$ で x のままである．
(iii) 時刻 n での点 P の座標 x が奇数であるとき，時刻 $n+1$ での点 P の座標は確率 $\dfrac{7}{8}$ で $x+1$ となり，確率 $\dfrac{1}{8}$ で $x-1$ となる．

自然数 n に対し，時刻 n での点 P の座標が 0 である確率を p_n とし，座標が 1 である確率を q_n とする．また，時刻 n での点 P の座標が奇数である確率を r_n とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) p_1，p_2 を求めよ．
(2) r_n を求めよ．
(3) p_{n+2} を p_{n+1} と p_n を用いて表せ．
(4) 実数 $\alpha,\ \beta$ はすべての自然数 n に対して

$$p_{n+2}-\alpha p_{n+1}=\beta(p_{n+1}-\alpha p_n)$$

を満たす．このような $\alpha,\ \beta$ の組 $(\alpha,\ \beta)$ を 2 組求めよ．
(5) p_n，q_n を求めよ．

(23 電気通信大 後 4)

【答】

(1) $p_1=\dfrac{1}{3}$，$p_2=\dfrac{7}{36}$
(2) $r_n=\dfrac{2}{5}\left\{1-\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n\right\}$
(3) $p_{n+2}=\dfrac{1}{3}p_{n+1}+\dfrac{1}{12}p_n$
(4) $(\alpha,\ \beta)=\left(-\dfrac{1}{6},\ \dfrac{1}{2}\right)$，$\left(\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{11}{6}\right)$
(5) $p_n=$，$q_n=$

【解答】

点 P の座標は次のように変化する．

(偶数)　　　　(奇数)

(1) p_1 は時刻 1 での点 P の座標が 0 である確率であり，このときの P の移動は

$$0\longrightarrow 0$$

であるから

$$\boldsymbol{p_1=\frac{1}{3}}\qquad\cdots\cdots(答)$$

である．時刻 2 での点 P の座標が 0 であるのは

$$0\longrightarrow 0\longrightarrow 0\quad または\quad 0\longrightarrow 1\longrightarrow 0$$

の 2 通りの移動がある．よって

$$\boldsymbol{p_2} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{8} = \frac{4+3}{3^2\cdot 4} = \boldsymbol{\frac{7}{36}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) r_n は時刻 n での点 P の座標が奇数である確率であり，時刻 $n+1$ での P の座標が奇数であるのは，時刻 n での座標 x が偶数で，次に確率 $\dfrac{2}{3}$ で $x+1$ に移る場合であるから

$$r_{n+1} = (1-r_n)\cdot\frac{2}{3} \quad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

が成り立つ．これは

$$r_{n+1} - \frac{2}{5} = -\frac{2}{3}\left(r_n - \frac{2}{5}\right)$$

と変形される．$r_1 = \dfrac{2}{3}$ であり，数列 $\left\{r_n - \dfrac{2}{5}\right\}$ は初項 $r_1 - \dfrac{2}{5} = \dfrac{2}{3} - \dfrac{2}{5} = \dfrac{4}{15}$，公比 $-\dfrac{2}{3}$ の等比数列である．よって

$$r_n - \frac{2}{5} = \frac{4}{15}\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1} = -\frac{2}{5}\left(-\frac{2}{3}\right)^n$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{r_n = \frac{2}{5}\left\{1-\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right\}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(3) 時刻 $n+2$ での P の座標が 0 であるのは，次の 2 つの場合がある．

(i) 時刻 $n+1$ での座標が 0 で，次に確率 $\dfrac{1}{3}$ で 0 のままである．

(ii) 時刻 $n+1$ での座標が 1 で，次に確率 $\dfrac{1}{8}$ で 0 に移動する．

これらは排反であるから

$$p_{n+2} = \frac{1}{3}p_{n+1} + \frac{1}{8}q_{n+1} \quad (n=1,\ 2,\ \cdots) \qquad \cdots\cdots ①$$

ここで，時刻 $n+1$ での P の座標が 1 であるのは，時刻 n での座標が 0 で，次に確率 $\dfrac{2}{3}$ で 1 に移る場合であるから

$$q_{n+1} = \frac{2}{3}p_n \quad (n=1,\ 2,\ \cdots) \qquad \cdots\cdots ②$$

①，② より

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p_{n+2}} &= \frac{1}{3}p_{n+1} + \frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}p_n \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{3}p_{n+1} + \frac{1}{12}p_n} \quad (n=1,\ 2,\ \cdots)\end{aligned} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(4) $p_{n+2} - \alpha p_{n+1} = \beta(p_{n+1} - \alpha p_n)$ を展開すると

$$p_{n+2} = (\alpha+\beta)p_{n+1} - \alpha\beta p_n$$

となる．これと (3) の結果より

$$\begin{cases}\alpha+\beta = \dfrac{1}{3} \\ \alpha\beta = -\dfrac{1}{12}\end{cases}$$

であり，α，β は 2 次方程式

$$x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{12} = 0$$

の解である．これを解くと

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{6}\right) = 0 \qquad \therefore\quad x = \frac{1}{2},\ -\frac{1}{6}$$

よって

$$\boldsymbol{(\alpha,\ \beta) = \left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{6}\right),\ \left(-\frac{1}{6},\ \frac{1}{2}\right)} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(5) (4) より，(3) の漸化式は次のように変形できる．

$$p_{n+2} - \frac{1}{2}p_{n+1} = -\frac{1}{6}\left(p_{n+1} - \frac{1}{2}p_n\right) \qquad \cdots\cdots ③$$

$$p_{n+2} + \frac{1}{6}p_{n+1} = \frac{1}{2}\left(p_{n+1} + \frac{1}{6}p_n\right) \qquad \cdots\cdots ④$$

③より，数列 $\left\{p_{n+1} - \frac{1}{2}p_n\right\}$ は初項 $p_2 - \frac{1}{2}p_1 = \frac{7}{36} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{36}$，公比 $-\frac{1}{6}$ の等比数列であるから

$$p_{n+1} - \frac{1}{2}p_n = \frac{1}{36}\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1} = \left(-\frac{1}{6}\right)^{n+1} \quad (n = 1,\ 2,\ \cdots) \qquad \cdots\cdots ③'$$

となる．④より，数列 $\left\{p_{n+1} + \frac{1}{6}p_n\right\}$ は初項 $p_2 + \frac{1}{6}p_1 = \frac{7}{36} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{4}$，公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$p_{n+1} + \frac{1}{6}p_n = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \quad (n = 1,\ 2,\ \cdots) \qquad \cdots\cdots ④'$$

となる．④$'$ − ③$'$ より

$$\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\right)p_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \left(-\frac{1}{6}\right)^{n+1}$$

$$\therefore\ \ \boldsymbol{p_n = \frac{3}{2}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \left(-\frac{1}{6}\right)^{n+1}\right\}} \quad (n = 1,\ 2,\ \cdots) \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．また，②より，$n \geqq 2$ に対して

$$q_n = \frac{2}{3}p_{n-1} = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(-\frac{1}{6}\right)^n\right\} = \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(-\frac{1}{6}\right)^n$$

である．$q_1 = \frac{2}{3}$ であるから，これは $n = 1$ でも成り立つ．よって

$$\boldsymbol{q_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(-\frac{1}{6}\right)^n} \quad (n = 1,\ 2,\ \cdots) \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．