$p>1$ とし，$f(x)=x^2-p$ とおく．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 点 $(a,\ f(a))$ における曲線 $y=f(x)$ の接線の方程式を求めよ．

(2) 数列 $\{a_n\}$ を次の (i)，(ii) によって定める．

(i) $a_1=p$ とする．

(ii) $n \geqq 2$ のとき，点 $(a_{n-1},\ f(a_{n-1}))$ における曲線 $y=f(x)$ の接線と，x 軸の交点の x 座標を a_n とする．

このとき，すべての自然数 n について，$a_n>0$ が成り立つことを示せ．

(3) $\{a_n\}$ を (2) で定めた数列とする．このとき，すべての自然数 n について，$a_n>\sqrt{p}$ が成り立つことを示せ．

(4) $\{a_n\}$ を (2) で定めた数列とする．このとき．すべての自然数 n について，

$$a_{n+1}-\sqrt{p}<\frac{(a_n-\sqrt{p})^2}{2}$$

が成り立つことを示せ．

(23 高知大 教育 4)

【答】

(1) $y=2ax-a^2-p$

(2) 略

(3) 略

(4) 略

【解答】

$$f(x)=x^2-p,\quad p>1$$

(1) $f'(x)=2x$ であるから，点 $(a,\ f(a))$ における曲線 $y=f(x)$ の接線の方程式は

$$y=2a(x-a)+a^2-p$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{y=2ax-a^2-p} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) 点 $(a_{n-1},\ f(a_{n-1}))$ における曲線 $y=f(x)$ の接線の方程式は，(1) の結果より

$$y=2a_{n-1}x-{a_{n-1}}^2-p$$

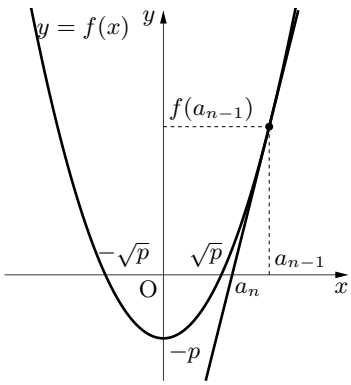
であり．この接線と x 軸との交点の x 座標が a_n であるから

$$0=2a_{n-1}a_n-{a_{n-1}}^2-p$$

$$\therefore\quad 2a_{n-1}a_n={a_{n-1}}^2+p$$

が成り立つ．$p \neq 0$ より，$a_{n-1} \neq 0$ であるから

$$a_n=\frac{{a_{n-1}}^2+p}{2a_{n-1}} \qquad \cdots\cdots ①$$



が成立する、

以下，すべての自然数について

$$a_n>0 \qquad \cdots\cdots (*)$$

が成り立つことを数学的婦納法で示す．

(i) $n=1$ のとき

$a_1=p>1$ であるから，$n=1$ のとき $(*)$ は成り立つ．

(ii) $n=k$ での成立を仮定する．

$$a_{k+1}=\frac{{a_k}^2+p}{2a_k}>0 \quad (\because\ p>1,\ \text{帰納法の仮定})$$

であるから，$n=k+1$ のときも $(*)$ が成り立つ．

(i)，(ii) より，すべての自然数 n について，$(*)$ が成り立つ． …… (証明終わり)

(3) すべての自然数 n について

$$a_n>\sqrt{p} \qquad \cdots\cdots (**)$$

成立することを数学的帰納法で示す．

(i) $n=1$ のとき

$$a_1-\sqrt{p}=p-\sqrt{p}=\sqrt{p}(\sqrt{p}-1)>0 \quad (\because\ p>1)$$

であるから，$n=1$ のとき $(**)$ は成り立つ．

(ii) $n=k$ での成立を仮定すると

$$\begin{aligned} a_{k+1}-\sqrt{p}&=\frac{{a_k}^2+p}{2a_k}-\sqrt{p}=\frac{{a_k}^2+p-2\sqrt{p}a_k}{2a_k}\\ &=\frac{(a_k-\sqrt{p})^2}{2a_k}>0 \quad (\because\ \text{帰納法の仮定，(2) より } a_k>0) \end{aligned}$$

であるから，$n=k+1$ のときも $(**)$ が成り立つ．

(i)，(ii) より，すべての自然数 n について，$(**)$ が成り立つ． …… (証明終わり)

- (ii) において，(2) の結果の $a_k>0$ を用いたが，これは (3) の帰納法の仮定から $a_k>\sqrt{p}>1>0$ として示すことができる．(3) が示されれば，(2) も成り立つ．

(4) ① より

$$\begin{aligned} a_{n+1}-\sqrt{p}&=\frac{{a_n}^2+p}{2a_n}-\sqrt{p}\\ &=\frac{(a_n-\sqrt{p})^2}{2a_n}\\ &<\frac{(a_n-\sqrt{p})^2}{2} \quad (\because\ (3),\ a_n>\sqrt{p}>1) \end{aligned}$$

であるから，すべての自然数 n について

$$a_{n+1}-\sqrt{p}<\frac{(a_n-\sqrt{p})^2}{2}$$

が成立する． …… (証明終わり)