放物線 $C : y = x^2$ 上を動く 2 点 $\mathrm{P}(s,\ s^2)$，$\mathrm{Q}(t,\ t^2)$ を考える．ただし，$s < 0 < t$ とする．P を通り，P における C の接線と垂直に交わる直線を ℓ_{P} とする．また，Q を通り，Q における C の接線と垂直に交わる直線を ℓ_{Q} とする．さらに，ℓ_{Q} は ℓ_{P} と垂直に交わるとする．以下の問いに答えよ．

(1) ℓ_{P} の方程式を s を用いて表せ．
(2) ℓ_{Q} の方程式を s を用いて表せ．
(3) ℓ_{P} と ℓ_{Q} の交点を $\mathrm{R}(x_0,\ y_0)$ とする．$x_0,\ y_0$ を s を用いて表せ．
(4) (3) の y_0 が最小となる s の値を求めよ．

(23 岡山大 文系 1)

【答】

(1) $\ell_{\mathrm{P}} : y = -\dfrac{1}{2s}x + \dfrac{1}{2} + s^2$

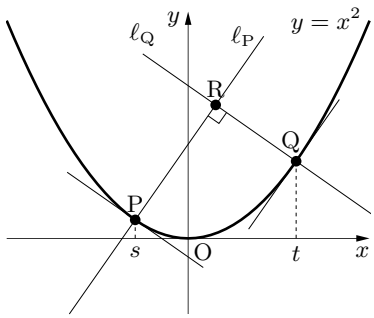
(2) $\ell_{\mathrm{Q}} : y = 2sx + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{16s^2}$

(3) $x_0 = \dfrac{1}{2}\left(s - \dfrac{1}{4s}\right)$，$y_0 = \dfrac{1}{4} + s^2 + \dfrac{1}{16s^2}$

(4) $s = -\dfrac{1}{2}$

【解答】

$$C : y = x^2$$



(1) $y' = 2x$ より，C 上の点 $\mathrm{P}(s,\ s^2)$ における C の接線の傾きは $2s$ であり，この接線と垂直に交わる直線 ℓ_{P} の方程式は

$$y = -\frac{1}{2s}(x - s) + s^2$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{y = -\frac{1}{2s}x + \frac{1}{2} + s^2} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) (1) と同じようにして

$$\ell_{\mathrm{Q}} : y = -\frac{1}{2t}x + \frac{1}{2} + t^2$$

を得る．ℓ_{Q} は ℓ_{P} と垂直に交わるから

$$\left(-\frac{1}{2s}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2t}\right) = -1 \qquad \therefore\quad t = -\frac{1}{4s}$$

よって，ℓ_{Q} の方程式を s を用いて表すと

$$\boldsymbol{y = 2sx + \frac{1}{2} + \frac{1}{16s^2}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) ℓ_{P} と ℓ_{Q} の交点では

$$-\frac{1}{2s}x + \frac{1}{2} + s^2 = 2sx + \frac{1}{2} + \frac{1}{16s^2}$$

$$\left(2s + \frac{1}{2s}\right)x = s^2 - \frac{1}{16s^2}$$

$$2\left(s + \frac{1}{4s}\right)x = \left(s + \frac{1}{4s}\right)\left(s - \frac{1}{4s}\right)$$

$s+\dfrac{1}{4s} \neq 0$ より，交点の x 座標 x_0 は

$$\boldsymbol{x_0 = \frac{1}{2}\left(s - \frac{1}{4s}\right)} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．したがって，交点の y 座標 y_0 は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y_0} &= -\frac{1}{2s}\cdot\frac{1}{2}\left(s-\frac{1}{4s}\right)+\frac{1}{2}+s^2\\ &= \boldsymbol{\frac{1}{4}+s^2+\frac{1}{16s^2}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

である．

(4) $s^2>0,\ \dfrac{1}{16s^2}>0$ であるから，相加平均・相乗平均の関係を用いると

$$\begin{aligned}y_0 &= \frac{1}{4}+s^2+\frac{1}{16s^2}\\ &\geqq \frac{1}{4}+2\sqrt{s^2\cdot\frac{1}{16s^2}}\\ &= \frac{1}{4}+\frac{2}{4}\\ &= \frac{3}{4}\end{aligned}$$

等号は $s^2=\dfrac{1}{16s^2}$，すなわち，$s=-\dfrac{1}{2}(<0)$ のとき成り立つ．

よって，y_0 が最小となる s の値は

$$\boldsymbol{s = -\frac{1}{2}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．