k は定数とする．関数 $f(x)=x^3+k(3x^2+3x+1)$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ が極値をもつための定数 k の値の範囲を求めよ．
(2) $f(x)$ が極値をとる x の値を α, β $(\alpha<\beta)$ とする．$|f(\alpha)-f(\beta)|$ を k を用いて表せ．
(3) $\beta-\alpha=2\sqrt{2}$ のとき，$|f(\alpha)-f(\beta)|$ の値を求めよ．また，このときの k の値を求めよ．

(23 三重大 後 生資 3)

【答】
(1) $k<0$ または $1<k$
(2) $|f(\alpha)-f(\beta)|=4\{k(k-1)\}^{\frac{3}{2}}$
(3) $|f(\alpha)-f(\beta)|=8\sqrt{2}$，$k=2$，$-1$

【解答】

$$f(x)=x^3+k(3x^2+3x+1)$$

(1) 微分すると

$$\begin{aligned} f'(x)&=3x^2+k(6x+3)\\ &=3(x^2+2kx+k) \end{aligned}$$

$f(x)$ が極値をもつ条件は $f'(x)$ の符号が変化することである．それは $f'(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもつことであり，$f'(x)=0$ の判別式を D とおくと $D>0$ である．

$$\frac{D}{4}=k^2-k=k(k-1)$$

より，求める k の値の範囲は

$$\boldsymbol{k<0 \text{ または } 1<k} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) α, β $(\alpha<\beta)$ は $f'(x)=0$ の解であり

$$f'(x)=3(x-\alpha)(x-\beta)$$

を満たす．関数値の差を定積分で表すことができ

$$\begin{aligned} |f(\alpha)-f(\beta)|&=\left|\Big[f(x)\Big]_{\beta}^{\alpha}\right|=\left|\int_{\beta}^{\alpha}f'(x)\,dx\right|\\ &=3\left|\int_{\beta}^{\alpha}(x-\alpha)(x-\beta)\,dx\right|\\ &=3\left|-\frac{(\alpha-\beta)^3}{6}\right|\\ &=\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3 \quad (\because\ \alpha<\beta) \qquad \cdots\cdots ① \end{aligned}$$

である．ここで

$$\beta-\alpha=\{-k+\sqrt{k(k-1)}\}-\{-k-\sqrt{k(k-1)}\}=2\sqrt{k(k-1)}$$

であるから

$$\boldsymbol{|f(\alpha)-f(\beta)|=4\{k(k-1)\}^{\frac{3}{2}}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

- α, β $(\alpha < \beta)$ は $f'(x) = 0$，すなわち $x^2 + 2kx + k = 0$ の解であり，解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -2k \\ \alpha\beta = k \end{cases}$$

が成り立つ．

$$\begin{aligned} f(\alpha) - f(\beta) &= (\alpha^3 - \beta^3) + 3k(\alpha^2 - \beta^2) + 3k(\alpha - \beta) \\ &= (\alpha - \beta)\{(\alpha + \beta)^2 - \alpha\beta + 3k(\alpha + \beta) + 3k\} \end{aligned}$$

ここで

$$\alpha - \beta = \{-k - \sqrt{k(k-1)}\} - \{-k + \sqrt{k(k-1)}\} = -2\sqrt{k(k-1)} \qquad \cdots\cdots ②$$

であるから

$$\begin{aligned} f(\alpha) - f(\beta) &= -2\sqrt{k(k-1)}\{(-2k)^2 - k + 3k(-2k) + 3k\} \\ &= -2\sqrt{k(k-1)}(-2k^2 + 2k) \\ &= 4\{k(k-1)\}^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

(1) より，$k(k-1) > 0$ であり

$$|f(\alpha) - f(\beta)| = 4\{k(k-1)\}^{\frac{3}{2}}$$

である．

- $f(x)$ を $x^2 + 2kx + k$ で割ると

$$\begin{array}{r|llll} & x & +k & & \\ \hline x^2+2kx+k & x^3 & +3kx^2 & +3kx & +k \\ & x^3 & +2kx^2 & +kx & \\ \hline & & kx^2 & +2kx & +k \\ & & kx^2 & +2k^2x & +k^2 \\ \hline & & & (2k-2k^2)x & +k-k^2 \end{array}$$

であり

$$f(x) = (x^2 + 2kx + k)(x + k) + 2k(1 - k)x + k - k^2$$

となる．α, β は $x^2 + 2kx + k = 0$ の解であるから

$$\begin{aligned} |f(\alpha) - f(\beta)| &= |2k(1-k)(\alpha - \beta)| = |-4k(1-k)\sqrt{k(k-1)}| \quad (\because\ ②) \\ &= 4\{k(k-1)\}^{\frac{3}{2}} \quad (\because\ k(k-1>0)) \end{aligned}$$

である．

(3) $\beta - \alpha = 2\sqrt{2}$ のとき，① より

$$|f(\alpha) - f(\beta)| = \frac{1}{2}(2\sqrt{2})^3 = \boldsymbol{8\sqrt{2}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．また，このときの k の値は ② より

$$\begin{aligned} &2\sqrt{2} = 2\sqrt{k(k-1)} \\ &k^2 - k - 2 = 0 \\ &(k-2)(k+1) = 0 \\ \therefore\ \ &\boldsymbol{k = 2,\ -1} \qquad \cdots\cdots(答) \end{aligned}$$

である．