縦の長さが 9 cm，横の長さが 24 cm の長方形の厚紙がある．この厚紙から容積が最大となる箱を作る．このとき，箱にふたがない場合とふたがある場合で容積の最大値がどう変わるかを調べたい．ただし，厚紙の厚さは考えず，作る箱の形を直方体とみなす．

(1) 厚紙の四隅（すみ）から図 1 のように四つの合同な正方形の斜線部分を切り取り，破線にそって折り曲げて，ふたのない箱を作る．この箱の容積を $V\text{cm}^3$ とする．

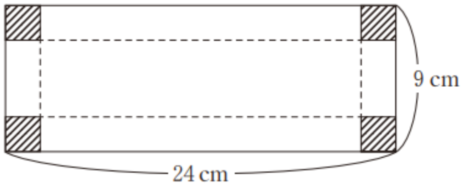

図 1 ふたのない箱を作る場合

次の**構想**に基づいて箱の容積の最大値を考える．

構想

図 1 のように切り取る斜線部分の正方形の一辺の長さを x cm とする．V を x の関数として表し，箱が作れる x の値の範囲に注意して V の最大値を考える．

箱が作れるための x のとり得る値の範囲は $0 < x < \dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である．V を x の式で表すと

$$V = \boxed{\text{ウ}}\,x^3 - \boxed{\text{エオ}}\,x^2 + \boxed{\text{カキク}}\,x$$

であり，V は $x = \boxed{\text{ケ}}$ で最大値 $\boxed{\text{コサシ}}$ をとる．

(2) 厚紙の四隅から図 2 のように四つの斜線部分を切り取り，破線にそって折り曲げて，ふたでぴったりと閉じることのできる箱を作る．この箱の容積を $W\text{cm}^3$ とする．

図 2 の四つの斜線部分のうち，左側二つの斜線部分をそれぞれ一辺の長さが x cm の正方形とすると，右側二つの斜線部分は，それぞれ縦の長さが x cm，横の長さが $\boxed{\text{ス}}$ cm の長方形となる．

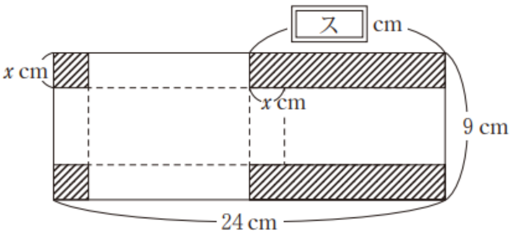

図 2 ふたのある箱を作る場合

$\boxed{\text{ス}}$ の解答群

⓪ 6	① $(6 - x)$	② $(6 + x)$
③ 12	④ $(12 - x)$	⑤ $(12 + x)$
⑥ 18	⑦ $(18 - x)$	⑧ $(18 + x)$

太郎さんと花子さんは，W を x の式で表した後，(1) の結果を見ながら W の最大値の求め方について話している．

太郎： W の式がわかったから，W の最大値は (1) と同じように求められるね．
花子： ちょっと待って．W を表す式と (1) の V を表す式は似ているね．W を表す式と V を表す式の関係を利用できないかな．

(1) の V が最大値をとるときの x の値を x_0 とする．W の最大値は (1) で求めた V の最大値 $\boxed{セ}$．また，W が最大値をとる x は $\boxed{ソ}$．

$\boxed{セ}$ の解答群

⓪ の $\frac{1}{4}$ 倍である	① の 4 倍である
② の $\frac{1}{3}$ 倍である	③ の 3 倍である
④ の $\frac{1}{2}$ 倍である	⑤ の 2 倍である
⑥ と等しくなる	

$\boxed{ソ}$ の解答群

⓪ ただ一つあり，その値は x_0 より小さい
① ただ一つあり，その値は x_0 より大きい
② ただ一つあり，その値は x_0 と等しい
③ 二つ以上ある

(3) 縦の長さが 9 cm，横の長さが 24 cm の長方形に限らず，いろいろな長方形の厚紙から (1)，(2) と同じようにふたのない箱とふたのある箱を作る．このとき

ふたのある箱の容積の最大値が，ふたのない箱の容積の最大値 $\boxed{セ}$

ということが成り立つための長方形についての記述として，次の⓪〜④のうち，正しいものは $\boxed{タ}$ である．

$\boxed{タ}$ の解答群

⓪ 縦の長さが 9 cm，横の長さが 24 cm の長方形のときのみ成り立つ．
① 縦の長さが 9 cm，横の長さが 24 cm の長方形のときと，縦の長さが 24 cm，横の長さが 9 cm の長方形のときのみ成り立つ．
② 縦と横の長さの比が 3 : 8 の長方形のときのみ成り立つ．
③ 縦と横の長さの比が 3 : 8 の長方形のときと，縦と横の長さの比が 8 : 3 の長方形のときのみ成り立つ．
④ 縦と横の長さに関係なくどのような長方形のときでも成り立つ．

(23 共通テスト 追・再試験 II・IIB 2〔1〕)

【答】

ア	イ	ウ	エオ	カキク	ケ	コサシ	ス	セ	ソ	タ
9	2	4	66	216	2	200	3	4	2	4

【解答】

(1) 図 1 において切り取る斜線部分の正方形の一辺の長さを x cm とすると，ふたのない箱の底面の縦の長さは $9-2x$，横の長さは $24-2x$ であるから，箱が作れるための x のとり得る値の範囲は

$$\begin{cases}0<9-2x<9\\0<24-2x<24\end{cases}\quad \therefore \quad \begin{cases}0<2x<9\\0<2x<24\end{cases}\quad \therefore \quad 0<x<\boldsymbol{\frac{9}{2}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

ふたのない箱の容積 V を x の式で表すと

$$\begin{aligned}V&=(9-2x)(24-2x)x\\&=\boldsymbol{4}x^3-\boldsymbol{66}x^2+\boldsymbol{216}x\end{aligned} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

であり

$$\begin{aligned}V'&=12x^2-132x+216\\&=12(x^2-11x+18)\\&=12(x-2)(x-9)\end{aligned}$$

x	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$	$\left(\frac{9}{2}\right)$
V'		$+$	0	$-$	
V		$\nearrow$		$\searrow$	

$0<x<\frac{9}{2}$ における V の増減は右表となる．

V は $x=\boldsymbol{2}$ で ……(答)

最大値 : $(9-4)\cdot(24-4)\cdot 2=5\cdot 20\cdot 2=\boldsymbol{200}$ ……(答)

をとる．

(2) 図 2 において四つの斜線部分のうち，左側二つの斜線部分をそれぞれ一辺の長さが x cm の正方形とすると，ふたのある箱の底面の横の長さは $\frac{1}{2}(24-2x)=12-x$ である．

したがって，右側二つの斜線部分は，それぞれ

縦の長さが x cm，横の長さが $x+(12-x)=12$ cm の長方形 ③ ……(答)

となる．

ふたのある箱の容積 W を x の式で表すと

$$W=(9-2x)(12-x)x=\frac{1}{2}(9-2x)(24-2x)x=\frac{1}{2}V$$

であり，W の最大値は (1) で求めた V の最大値の $\boldsymbol{\frac{1}{2}}$ **倍である．** ④ ……(答)

また，(1) の V が最大値をとるときの x の値を x_0 とすると，W が最大値をとる x は **ただ一つあり，その値は $\boldsymbol{x_0}$ と等しい．** ② ……(答)

(3) 横の長さが a cm，縦の長さが b cm の長方形の厚紙から (1)，(2) と同じようにふたのない箱とふたのある箱を作る．このときの容積をそれぞれ v cm^3，w cm^3 とおくと

$$\begin{aligned}v&=(a-2x)(b-2x)x,\\w&=(a-2x)\frac{b-2x}{2}x=\frac{1}{2}v\end{aligned}$$

であるから

ふたのある箱の容積の最大値が，ふたのない箱の容積の最大値の $\frac{1}{2}$ 倍である

ということは

縦と横の長さに関係なくどのような長方形のときでも成り立つ． ④ ……(答)