関数 $f(x)=x^3-5x^2+6x-6+\dfrac{6}{x}-\dfrac{5}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}$ $(x \geqq 1)$ は，$x=$ $\boxed{\text{コ}}$ のとき，最小値 $\boxed{\text{サ}}$ をとる．

(23 山梨大 後 医 2(1))

【答】

コ	サ
$\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$	-5

【解答】

$$f(x)=x^3-5x^2+6x-6+\frac{6}{x}-\frac{5}{x^2}+\frac{1}{x^3}\ (x \geqq 1)$$

$f(x)$ を変形すると

$$\begin{aligned}
f(x)&=\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)-5\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+6\left(x+\frac{1}{x}\right)-6\\
&=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3x\cdot\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{x}\right)-5\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2x\cdot\frac{1}{x}\right\}+6\left(x+\frac{1}{x}\right)-6\\
&=t^3-3t-5(t^2-2)+6t-6 \quad \left(t=x+\frac{1}{x}\ \text{とおいた}\right)\\
&=t^3-5t^2+3t+4
\end{aligned}$$

$g(x)=x+\dfrac{1}{x}$ $(x \geqq 1)$ とおくと，$x>1$ において

$$g'(x)=1-\frac{1}{x^2}=\frac{(x+1)(x-1)}{x^2}>0$$

となるから，$g(x)$ は増加関数であり

$$g(x) \geqq g(1)=2$$

である．また，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} g(x)=\infty$ であるから，$g(x)$，すなわち，t は 2 以上のすべての実数値をとる．関数 $h(t)=t^3-5t^2+3t+4$ の $t \geqq 2$ における最小値を求める．

$$\begin{aligned}
h'(t)&=3t^2-10t+3\\
&=(3t-1)(t-3)
\end{aligned}$$

t	2	$\cdots$	3	$\cdots$
$h'(t)$		$-$	0	$+$
$h(t)$		$\searrow$		$\nearrow$

なので，$h(t)$ の増減は右表となる．

よって，求める最小値は

$$h(3)=3^3-5\cdot 3^2+3\cdot 3+4=(3-5+1)\cdot 3^2+4=\mathbf{-5} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．このときの x の値を求める．最小となるのは $t=3$ のときだから

$$x+\frac{1}{x}=3$$

$x \geqq 1$ なので

$$x^2-3x+1=0 \qquad \therefore \quad x=\boldsymbol{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\ (\geqq 1) \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- t のとりうる値の範囲は,「$t = x + \dfrac{1}{x}$ かつ $x \geqq 1$ を満たす x が存在するような t の値の集合」，すなわち「x の 2 次方程式 $x^2 - tx + 1 = 0$ を満たす解 x が $x \geqq 1$ に少なくとも 1 つ存在するような t の値の集合」である．

  $T(x) = x^2 - tx + 1$ とおくと

$$T(x) = \left(x - \frac{t}{2}\right)^2 + 1 - \left(\frac{t}{2}\right)^2$$

  $y = T(x)$ の軸 $x = \dfrac{t}{2}$ が定義域内にあるか否かで場合分けする．

  (i) $\dfrac{t}{2} < 1$ $(t < 2)$ のとき

  $x \geqq 1$ において $T(x)$ は単調増加であり，$T(1) = 2 - t > 0$ であるから，$T(x) = 0$ となる x は存在しない．

  (ii) $\dfrac{t}{2} \geqq 1$ $(t \geqq 2)$ のとき

  $x \geqq 1$ における $T(x)$ の最小値は $T\left(\dfrac{t}{2}\right)$ であり

$$T\left(\frac{t}{2}\right) = 1 - \left(\frac{t}{2}\right)^2 \leqq 0$$

  であり，$T(x) = 0$ となる x は存在する．

  (i)，(ii) より，t は $t \geqq 2$ の範囲で動く．