

$a, b$  を実数とする. 関数  $f(x) = 3x^3 - 3ax^2 + 3bx - 2$  について,

- (1)  $f(x)$  が  $x = 1$  で極値をとるとき,  $b = \boxed{\text{サ}} a - \boxed{\text{シ}}$  である  
 (2)  $f(x)$  が  $x = 1$  で極大値 7 をとるとき,  $a = \boxed{\text{ス}}$ ,  $b = \boxed{\text{セ}}$  である.  
 (3)  $f(x)$  が  $x = 1$  で極小値をとるとき,  $a$  のとり得る値の範囲は  $a < \boxed{\text{ソ}}$  である.

(23 金沢工大 A2 日目 3)

【答】	サ	シ	ス	セ	ソ
	2	3	5	7	3

【解答】

$$f(x) = 3x^3 - 3ax^2 + 3bx - 2$$

$$f'(x) = 9x^2 - 6ax + 3b$$

- (1)  $f(x)$  が  $x = 1$  で極値をとるための条件は,  $f'(x)$  の符号が  $x = 1$  で変化することであり,  $f'(1) = 0$  であることが必要である.

$$f'(1) = 9 - 6a + 3b = 0 \quad \text{より} \quad b = 2a - 3$$

である. このとき  $f'(x) = 0$  の判別式を  $D$  とおくと

$$\frac{D}{4} = (-3a)^2 - 9 \cdot 3b = 9\{a^2 - 3(2a - 3)\} = 9(a - 3)^2 \geq 0$$

であり,  $f(x)$  が  $x = 1$  で極値をとる条件は

$$b = 2a - 3 \quad \text{かつ} \quad a \neq 3$$

である.

よって,  $f(x)$  が  $x = 1$  で極値をとるときは,  $b = 2a - 3$  である. ……(答)

- (2)  $f(x)$  が  $x = 1$  で極大値 7 をとるためには

$$\begin{cases} f(1) = 7 \\ f'(1) = 0 \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} -3a + 3b + 1 = 7 \\ b = 2a - 3 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} -a + b = 2 \\ b = 2a - 3 \end{cases} \quad \therefore \quad a = 5, \quad b = 7$$

であることが必要である. このとき

$$\begin{aligned} f'(x) &= 9x^2 - 30x + 21 \\ &= 3(x - 1)(3x - 7) \end{aligned}$$

であり,  $f'(x)$  の符号は  $x = 1$  で正から負に変わるから,  $f(x)$  は  $x = 1$  で極大値をとり, 十分である.

以上より

$$a = 5, \quad b = 7 \quad \text{……(答)}$$

である.

- (3)  $f(x)$  が  $x = 1$  で極小値をとる条件は,  $f'(x)$  の符号が  $x = 1$  で負から正に変わることであり,  $y = f'(x)$  の軸の方程式が  $x = \frac{a}{3}$  であることに注意すると

$$\begin{cases} D > 0 \\ \frac{a}{3} < 1 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} (a - 3)^2 > 0 \\ a < 3 \end{cases} \quad \therefore \quad a < 3 \quad \text{……(答)}$$

である.