

a, b を実数とする. 関数 $f(x) = 3x^3 - 3ax^2 + 3bx - 2$ について,

- (1) $f(x)$ が $x = 1$ で極値をとるとき, $b = \boxed{\text{サ}}a - \boxed{\text{シ}}$ である
 (2) $f(x)$ が $x = 1$ で極大値 7 をとるとき, $a = \boxed{\text{ス}}$, $b = \boxed{\text{セ}}$ である.
 (3) $f(x)$ が $x = 1$ で極小値をとるとき, a のとり得る値の範囲は $a < \boxed{\text{ソ}}$ である.

(23 金沢工大 A2 日目 3)

【答】	サ	シ	ス	セ	ソ
	2	3	5	7	3

【解答】

$$f(x) = 3x^3 - 3ax^2 + 3bx - 2$$

$$f'(x) = 9x^2 - 6ax + 3b$$

- (1) $f(x)$ が $x = 1$ で極値をとるための条件は, $f'(x)$ の符号が $x = 1$ で変化することであり, $f'(1) = 0$ であることが必要である.

$$f'(1) = 9 - 6a + 3b = 0 \quad \text{より} \quad b = 2a - 3$$

である. このとき $f'(x) = 0$ の判別式を D とおくと

$$\frac{D}{4} = (-3a)^2 - 9 \cdot 3b = 9\{a^2 - 3(2a - 3)\} = 9(a - 3)^2 \geq 0$$

であり, $f(x)$ が $x = 1$ で極値をとる条件は

$$b = 2a - 3 \quad \text{かつ} \quad a \neq 3$$

である.

よって, $f(x)$ が $x = 1$ で極値をとるときは, $b = 2a - 3$ である. ……(答)

- (2) $f(x)$ が $x = 1$ で極大値 7 をとるためには

$$\begin{cases} f(1) = 7 \\ f'(1) = 0 \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} -3a + 3b + 1 = 7 \\ b = 2a - 3 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} -a + b = 2 \\ b = 2a - 3 \end{cases} \quad \therefore \quad a = 5, \quad b = 7$$

であることが必要である. このとき

$$\begin{aligned} f'(x) &= 9x^2 - 30x + 21 \\ &= 3(x - 1)(3x - 7) \end{aligned}$$

であり, $f'(x)$ の符号は $x = 1$ で正から負に変わるから, $f(x)$ は $x = 1$ で極大値をとり, 十分である.

以上より

$$a = 5, \quad b = 7 \quad \text{……(答)}$$

である.

- (3) $f(x)$ が $x = 1$ で極小値をとる条件は, $f'(x)$ の符号が $x = 1$ で負から正に変わることであり, $y = f'(x)$ の軸の方程式が $x = \frac{a}{3}$ であることに注意すると

$$\begin{cases} D > 0 \\ \frac{a}{3} < 1 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} (a - 3)^2 > 0 \\ a < 3 \end{cases} \quad \therefore \quad a < 3 \quad \text{……(答)}$$

である.