方程式 $\dfrac{x^4}{4} - x^3 - x^2 + 6x = c$ が異なる 4 つの実数解を持つように定数 c の値の範囲を定めなさい．

(23 福島大 人間発達文化 2(3))

【答】 $\dfrac{9}{4} < c < -1 + 4\sqrt{2}$

【解答】

$f(x) = \dfrac{x^4}{4} - x^3 - x^2 + 6x$ とおく．方程式 $f(x) = c$ が異なる 4 つの実数解を持つ条件は，曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = c$ が 4 つの共有点をもつことである．

$$\begin{aligned} f'(x) &= x^3 - 3x^2 - 2x + 6 \\ &= (x-3)(x^2-2) \end{aligned}$$

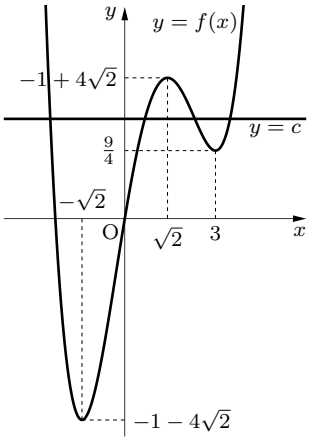
$f(x)$ の増減は下表となる．

x	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$$f(-\sqrt{2}) = \frac{4}{4} + 2\sqrt{2} - 2 - 6\sqrt{2} = -1 - 4\sqrt{2}$$

$$f(\sqrt{2}) = \frac{4}{4} - 2\sqrt{2} - 2 + 6\sqrt{2} = -1 + 4\sqrt{2}$$

$$f(3) = \frac{81}{4} - 27 - 9 + 18 = \frac{9}{4}$$



であるから，曲線 $y = f(x)$ のグラフは右図のようになる．

4 つの共有点をもつように直線 $y = c$ のグラフも加えると，求める c の値の範囲は

$$\boldsymbol{\frac{9}{4} < c < -1 + 4\sqrt{2}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．