次の問いに答えよ．

(1) 関数 $y=-2x^3+3x^2+12x$ の増減を調べ，極値を求め，そのグラフをかけ．

(2) 方程式 $-2x^3+3x^2+12x=k$ が異なる 3 つの実数解をもつとき，定数 k の範囲を求めよ．

(3) (2) において，3 つの解を大きい順に $\alpha>\beta>\gamma$ とおく．$-\dfrac{1}{2}<\beta<\dfrac{3}{2}$ となるとき，α の範囲を求めよ．

(23 東京海洋大 生命・資源 1)

【答】

(1) 増減表は略，極小値 -7，極大値 20，グラフは略

(2) $-7<k<20$

(3) $\sqrt{6}<\alpha<1+\sqrt{6}$

【解答】

(1) $f(x)=-2x^3+3x^2+12x$ とおくと

$$f'(x)=-6x^2+6x+12=-6(x+1)(x-2)$$

であり，$f(x)$ の増減は下表となる．

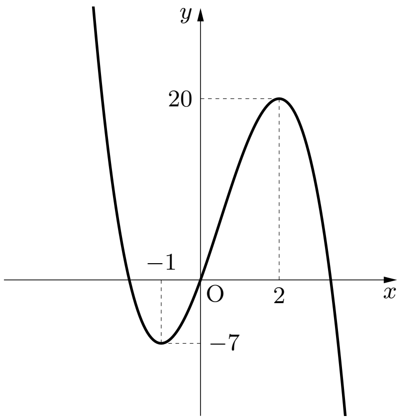
x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

よって，$f(x)$ は

$x=-1$ のとき，**極小値 -7**，　……(答)

$x=2$ のとき，**極大値 20**　……(答)

をとる．また，$y=f(x)$ のグラフは右図となる．



(2) $f(x)=k$ が異なる 3 つの実数解をもつ条件は，曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=k$ のグラフが 3 つの共有点をもつことである．

よって，(1) の図より求める定数 k の範囲は

$$\boldsymbol{-7<k<20}$$ ……(答)

である．

(3) $f(x)=f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ を解くと

$$-2x^3+3x^2+12x=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}-6$$

$$2x^3-3x^2-12x-5=0$$

$$(2x+1)(x^2-2x-5)=0$$

$$\therefore\quad x=-\frac{1}{2},\ 1\pm\sqrt{6}$$

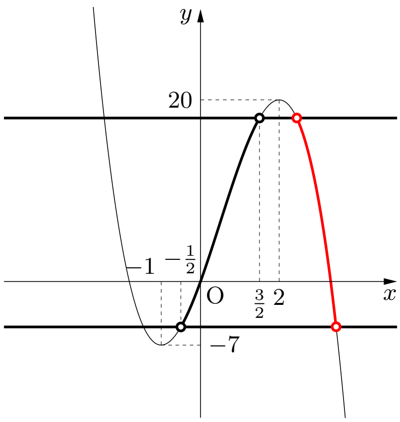
$f(x)=f\left(\dfrac{3}{2}\right)$ を解くと

$$-2x^3+3x^2+12x=-\frac{27}{4}+\frac{27}{4}+18$$

$$2x^3-3x^2-12x+18=0$$

$$(2x-3)(x^2-6)=0$$

$$\therefore\quad x=\frac{3}{2},\ \pm\sqrt{6}$$



これより，最大解 α の範囲は

$$\boldsymbol{\sqrt{6}<\alpha<1+\sqrt{6}}$$ ……(答)

である．