$1^2+2^2+\cdots+10^2$ をある関数の定積分で表すことを考えよう．

(1) すべての実数 t に対して，$\displaystyle\int_t^{t+1} f(x)\,dx = t^2$ となる 2 次関数 $f(x)$ を求めよう．

$$\int_t^{t+1} 1\,dx = \boxed{\text{チ}}$$

$$\int_t^{t+1} x\,dx = t + \frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}$$

$$\int_t^{t+1} x^2\,dx = t^2 + t + \frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$$

である．また，ℓ, m, n を定数とし，$f(x)=\ell x^2+mx+n$ とおくと

$$\int_t^{t+1} f(x)\,dx = \ell t^2 + (\ell+m)t + \frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}\ell + \frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}m + n$$

を得る．このことから，t についての恒等式

$$t^2 = \ell t^2 + (\ell+m)t + \frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}\ell + \frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}m + n$$

を得る．よって，$\ell = \boxed{\text{ニ}}$，$m = \boxed{\text{ヌネ}}$，$n = \dfrac{\boxed{\text{ノ}}}{\boxed{\text{ハ}}}$ とわかる．

(2) (1) で求めた $f(x)$ を用いれば，次が成り立つ．

$$1^2+2^2+\cdots+10^2 = \int_1^{\boxed{\text{ヒフ}}} f(x)\,dx$$

(23 共通テスト追・再試験 II・IIB 2〔2〕)

【答】

チ	ツ	テ	ト	ナ	ニ	ヌネ	ノ	ハ	ヒフ
1	1	2	1	3	1	−1	1	6	11

【解答】

(1) それぞれ積分すると

$$\int_t^{t+1} 1\,dx = \Big[x\Big]_t^{t+1} = (t+1)-t = \mathbf{1} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

$$\int_t^{t+1} x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_t^{t+1} = \frac{(t+1)^2-t^2}{2} = t + \mathbf{\frac{1}{2}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

$$\int_t^{t+1} x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_t^{t+1} = \frac{(t+1)^3-t^3}{3} = t^2+t+\mathbf{\frac{1}{3}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．また，ℓ，m，n を定数とし，$f(x)=\ell x^2+mx+n$ とおくと

$$\begin{aligned}\int_t^{t+1} f(x)\,dx &= \int_t^{t+1}(\ell x^2+mx+n)\,dx\\ &= \ell\left(t^2+t+\frac{1}{3}\right)+m\left(t+\frac{1}{2}\right)+n\\ &= \ell t^2+(\ell+m)t+\frac{1}{3}\ell+\frac{1}{2}m+n\end{aligned}$$

を得る．このことから，t についての恒等式

$$t^2=\ell t^2+(\ell+m)t+\frac{1}{3}\ell+\frac{1}{2}m+n$$

を得る．よって

$$\begin{cases}\ell=1\\ \ell+m=0\\ \dfrac{1}{3}\ell+\dfrac{1}{2}m+n=0\end{cases}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{\ell=1,\ m=-1,\ n=\frac{1}{6}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

とわかる．

(2) (1) より

$$t^2=\int_t^{t+1} f(x)\,dx$$

であるから

$$\begin{aligned}&1^2+2^2+\cdots+10^2\\ &=\int_1^2 f(x)\,dx+\int_2^3 f(x)\,dx+\cdots+\int_{10}^{11} f(x)\,dx\\ &=\int_1^{\mathbf{11}} f(x)\,dx \qquad \cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

が成り立つ．