$f(x)=\displaystyle\int_0^1 |t(t-x)|\,dt$ とする．$0 \leqq x \leqq 1$ のとき，$f(x)$ を x の整式で表すと

$f(x)=\boxed{}$ であり，$\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx=\boxed{}$ である．

(23 愛知工大 工・情報科 1(4))

【答】

$\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}$	$\frac{7}{12}$

【解答】

$$f(x)=\int_0^1 |t(t-x)|\,dt$$

x を $x \geqq 0$ の範囲で固定するとき

$$|t(t-x)|=\begin{cases} t(t-x) & (t \leqq 0,\ x \leqq t \text{ のとき}) \\ -t(t-x) & (0 \leqq t \leqq x \text{ のとき}) \end{cases}$$

である．

$0 \leqq x \leqq 1$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x -t(t-x)\,dt+\int_x^1 t(t-x)\,dt \\ &= \left[-\frac{t^3}{3}+x\cdot\frac{t^2}{2}\right]_0^x+\left[\frac{t^3}{3}-x\cdot\frac{t^2}{2}\right]_x^1 \\ &= 2\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{x^3}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}x\right) \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

……(答)

である．

また，$x \geqq 1$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^1 -t(t-x)\,dt \\ &= \left[-\frac{t^3}{3}+x\cdot\frac{t^2}{2}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2}x-\frac{1}{3} \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(x)\,dx &= \int_0^1\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}\right)dx+\int_1^2\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}\right)dx \\ &= \left[\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{3}x\right]_0^1+\left[\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{3}x\right]_1^2 \\ &= \left(\frac{1}{12}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right)+\frac{4-1}{4}-\frac{2-1}{3} \\ &= \frac{2}{12}+\frac{9}{12}-\frac{4}{12} \\ &= \frac{7}{12} \end{aligned}$$

である．