実数 $t \geqq 0$ に対して関数 $G(t)$ を次のように定義する．

$$G(t) = \int_t^{t+1} |3x^2 - 8x - 3|\, dx$$

このとき

(1) $0 \leqq t < \boxed{(9)}$ のとき

$$G(t) = \boxed{(10)}\boxed{(11)}t^2 + \boxed{(12)}\boxed{(13)}t + \boxed{(14)}\boxed{(15)}$$

(2) $\boxed{(9)} \leqq t < \boxed{(16)}$ のとき

$$G(t) = \boxed{(17)}\boxed{(18)}t^3 + \boxed{(19)}\boxed{(20)}t^2 + \boxed{(21)}\boxed{(22)}\boxed{(23)}t + \boxed{(24)}\boxed{(25)}$$

(3) $\boxed{(16)} \leqq t$ のとき

$$G(t) = \boxed{(26)}\boxed{(27)}t^2 + \boxed{(28)}\boxed{(29)}t + \boxed{(30)}\boxed{(31)}$$

である．また，$G(t)$ が最小となるのは，$t = \dfrac{\boxed{(32)}\boxed{(33)} + \sqrt{\boxed{(34)}\boxed{(35)}}}{\boxed{(36)}\boxed{(37)}}$ のときである．

(23 慶應大 総合政策 2)

【答】

(9)	(10)(11)	(12)(13)	(14)(15)	(16)	(17)(18)	(19)(20)	(21)(22)(23)
2	-3	05	06	3	02	-5	-11

(24)(25)	(26)(27)	(28)(29)	(30)(31)	(32)(33)	(34)(35)	(36)(37)
30	03	-5	-6	05	91	06

【解答】

$$|3x^2 - 8x - 3| = |(3x+1)(x-3)|$$
$$= \begin{cases} 3x^2 - 8x - 3 & \left(x \leqq -\dfrac{1}{3},\ 3 \leqq x \text{ のとき}\right) \\ -3x^2 + 8x + 3 & \left(-\dfrac{1}{3} \leqq x \leqq 3 \text{ のとき}\right) \end{cases}$$

である．積分区間 $(0 \leqq)t \leqq x \leqq t+1$ 内に $3x^2 - 8x - 3$ の符号の変わり目 $x = 3$ が含まれるか否かで場合分けする．

(1) $t + 1 < 3$ のとき，すなわち，$t \geqq 0$ とあわせて，$0 \leqq t < \mathbf{2}$ のとき

$$\begin{aligned} G(t) &= \int_t^{t+1} (-3x^2 + 8x + 3)\, dx \\ &= \Big[-x^3 + 4x^2 + 3x \Big]_t^{t+1} \\ &= \{-(t+1)^3 + 4(t+1)^2 + 3(t+1)\} - (-t^3 + 4t^2 + 3t) \\ &= (-t^3 + t^2 + 8t + 6) - (-t^3 + 4t^2 + 3t) \\ &= \boldsymbol{-3t^2 + 5t + 6} \end{aligned}$$

……(答)

である．

(2) $0 \leqq t < 3 \leqq t+1$，すなわち $2 \leqq t < \mathbf{3}$ のとき

$$G(t) = \int_t^3 (-3x^2+8x+3)\,dx + \int_3^{t+1} (3x^2-8x-3)\,dx$$
$$= \Big[-x^3+4x^2+3x\Big]_t^3 - \Big[-x^3+4x^2+3x\Big]_3^{t+1}$$
$$= 2\times(-27+36+9) - (-t^3+4t^2+3t)$$
$$\quad - \{-(t+1)^3+4(t+1)^2+3(t+1)\}$$
$$= 36-(-t^3+4t^2+3t)-(-t^3+t^2+8t+6)$$
$$= \boldsymbol{2t^3+(-5)t^2+(-11)t+30} \qquad \cdots\cdots(答)$$

(3) $3 \leqq t$ のとき

$$G(t) = \int_t^{t+1} (3x^2-8x-3)\,dx$$
$$= \Big[x^3-4x^2-3x\Big]_t^{t+1}$$
$$= \{(t+1)^3-4(t+1)-3(t+1)\}-(t^3-4t^2-3t)$$
$$= (t^3-t^2-8t-6)-(t^3-4t^2-3t)$$
$$= \boldsymbol{3t^2+(-5)t+(-6)} \qquad \cdots\cdots(答)$$

また

$$G'(t) = \begin{cases} -6t+5 & (0<t<2 \text{ のとき}) \\ 6t^2-10t-11 & (2<t<3 \text{ のとき}) \\ 6t-5 & (3<t \text{ のとき}) \end{cases}$$

$G'(t)$ の符号は $t=\dfrac{5}{6}$，$\dfrac{5+\sqrt{91}}{6}$ で変わるから $t \geqq 0$ における $G(t)$ の増減は下表となる．

x	0	$\cdots$	$\frac{5}{6}$	$\cdots$	2	$\cdots$	$\frac{5+\sqrt{91}}{6}$	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$f(x)$	6	$\nearrow$		$\searrow$	4	$\searrow$		$\nearrow$	6	$\nearrow$

よって，$G(t)$ が最小となるのは

$$t = \boldsymbol{\frac{5+\sqrt{91}}{6}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

のときである．