

定積分 $\int_0^1 \left\{ \sum_{k=1}^{100} k(k+1)x^k \right\} dx$ 求めよ.

(23 東京電機大 理工 1(5))

【答】 5050

【解答】

a, b, p, q, m, n が定数のとき

$$\int_a^b (px^m + qx^n) dx = p \int_a^b x^m dx + q \int_a^b x^n dx$$

が成り立つ. 与えられた 100 個の和の積分は

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left\{ \sum_{k=1}^{100} k(k+1)x^k \right\} dx &= \sum_{k=1}^{100} \left\{ k(k+1) \int_0^1 x^k dx \right\} \\ &= \sum_{k=1}^{100} \left\{ k(k+1) \left[\frac{x^{k+1}}{k+1} \right]_0^1 \right\} \\ &= \sum_{k=1}^{100} \left\{ k(k+1) \cdot \frac{1}{k+1} \right\} \\ &= \sum_{k=1}^{100} k \\ &= \frac{100 \cdot 101}{2} \\ &= \mathbf{5050} \end{aligned} \quad \dots\dots(\text{答})$$

である.