

$x \geq 0$ において、 $f(x) + \int_1^x 3tf'(t) dt = 3x^2 + 2x + 3$ を満たす関数 $f(x)$ を求めなさい。

(23 公立千歳科技大 中期 理工 1(4))

【答】 $f(x) = 2x + 6$

【解答】

$$f(x) + \int_1^x 3tf'(t) dt = 3x^2 + 2x + 3 \quad (x \geq 0) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①の辺々を x で微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) + 3xf'(x) &= 6x + 2 \\ (3x + 1)f'(x) &= 2(3x + 1) \end{aligned}$$

$x \geq 0$ より $3x + 1 \neq 0$ であり

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \\ \therefore f(x) &= 2x + C \quad (C \text{ は積分定数}) \quad \dots\dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

① において $x = 1$ とおくと

$$f(1) + 0 = 3 + 2 + 3 \quad \therefore f(1) = 8$$

① において $x = 1$ とおくと

$$8 = 2 \cdot 1 + C \quad \therefore C = 6$$

である。よって

$$f(x) = 2x + 6 \quad \dots\dots(\text{答})$$

である。