

等式 $f(x) = x^2 + \int_{-1}^2 (xf(t) - t) dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ.

(23 千葉大 3(2))

【答】 $f(x) = x^2 + 3x - \frac{3}{2}$

【解答】

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + \int_{-1}^2 (xf(t) - t) dt \\ &= x^2 + x \int_{-1}^2 f(t) dt - \int_{-1}^2 t dt \end{aligned}$$

定数 $\int_{-1}^2 f(t) dt$ を a とおくと

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + ax - \left[\frac{t^2}{2} \right]_{-1}^2 \\ &= x^2 + ax - \left(2 - \frac{1}{2} \right) \\ &= x^2 + ax - \frac{3}{2} \end{aligned}$$

であり

$$\begin{aligned} a &= \int_{-1}^2 f(t) dt \\ &= \int_{-1}^2 \left(t^2 + at - \frac{3}{2} \right) dt \\ &= \left[\frac{t^3}{3} + a \frac{t^2}{2} - \frac{3}{2} t \right]_{-1}^2 \\ &= \frac{8 - (-1)}{3} + a \frac{4 - 1}{2} - \frac{3}{2} (2 - (-1)) \\ &= 3 + \frac{3}{2} a - \frac{9}{2} \\ &= \frac{3}{2} a - \frac{3}{2} \end{aligned}$$

となる. 整理すると

$$\left(1 - \frac{3}{2} \right) a = -\frac{3}{2} \quad \therefore \quad a = 3$$

であるから

$$f(x) = x^2 + 3x - \frac{3}{2} \quad \dots\dots (\text{答})$$

である.