次の 2 つの等式を満たす関数 $f(x)$，$g(x)$ を求めよ．

$$f(x)=-3x+\int_0^1 g(x)\,dx,\quad g(x)=(x-1)^2-\int_0^2 f(x)\,dx$$

(23 茨城大 教育 1(2))

【答】 $f(x)=-3x+\dfrac{19}{9}$，　$g(x)=(x-1)^2+\dfrac{16}{9}$

【解答】

$$f(x)=-3x+\int_0^1 g(x)\,dx \qquad \cdots\cdots ①$$

$$g(x)=(x-1)^2-\int_0^2 f(x)\,dx \qquad \cdots\cdots ②$$

$\displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx$，$\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx$ は定数であり，それぞれを a，b とおくと

$$f(x)=-3x+a \qquad \cdots\cdots ①'$$

$$g(x)=(x-1)^2-b \qquad \cdots\cdots ②'$$

となる．したがって

$$a=\int_0^1\{(x-1)^2-b\}\,dx=\left[\frac{(x-1)^3}{3}-bx\right]_0^1=\frac{1}{3}-b$$

$$b=\int_0^2(-3x+a)\,dx=\left[-\frac{3}{2}x^2+ax\right]_0^2=-6+2a$$

$$\therefore\quad \begin{cases} a+b=\dfrac{1}{3} \\ 2a-b=6 \end{cases} \qquad \therefore\quad a=\frac{19}{9},\quad b=-\frac{16}{9}$$

①$'$，②$'$ に代入すると

$$\boldsymbol{f(x)=-3x+\frac{19}{9},\quad g(x)=(x-1)^2+\frac{16}{9}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

を得る．