a を定数として，$f(x)=x^3-3x^2+a$ とおく．$y=f(x)$ の極小値が負で，$y=f(x)$ のグラフと x 軸との共有点の個数が 2 であるとして，以下の問いに答えよ．

(1) a の値を求めよ．

(2) 直線 $y=9x+b$ が曲線 $y=f(x)$ の接線で，$b>0$ とする．b の値を求めよ．

(3) a，b を (1)，(2) で求めたものとして，曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=9x+b$ で囲まれた図形の面積を求めよ．

(23 三重大 人文・医 (看) 3)

【答】

(1) $a=0$
(2) $b=5$
(3) 108

【解答】

$$f(x)=x^3-3x^2+a$$

(1) 微分すると

$$f'(x)=3x^2-6x$$
$$=3x(x-2)$$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↗

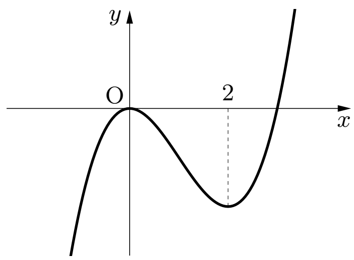
$f(x)$ の増減は右表となる．

$y=f(x)$ のグラフと x 軸の共有点の個数が 2 となる条件は，極値が 0 になることである．

極小値が負であることから，求める条件は，極大値が 0 となることである．極大値 $f(0)=a$ より，a の値は

$$\boldsymbol{a=0} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．



(2) $y=f(x)$ 上の点における接線の傾きが 9 となる接点の x 座標は

$$f'(x)=9$$
$$3x^2-6x=9$$
$$x^2-2x-3=0$$
$$(x-3)(x+1)=0$$
$$\therefore \quad x=3,\ -1$$

$f(x)=x^3-3x^2$ より，$y=f(x)$ 上の点 $(3,\ 0)$ における接線の方程式は

$$y=9(x-3) \qquad \therefore \quad y=9x-27$$

$y=f(x)$ 上の点 $(-1,\ -4)$ における接線の方程式は

$$y=9(x+1)-4 \qquad \therefore \quad y=9x+5$$

である．

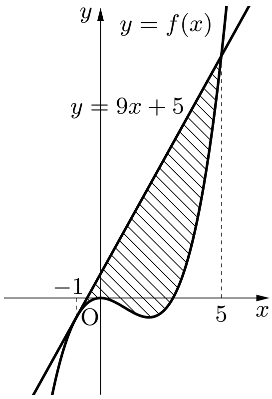
よって，$b>0$ となる接線 $y=9x+b$ は $y=9x+5$ であり

$$\boldsymbol{b=5} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) $y=f(x)$ と $y=9x+5$ の共有点の x 座標は

$$x^3-3x^2-9x-5=0$$
$$(x+1)^2(x-5)=0$$
$$\therefore \quad x=-1,\ 5$$



曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=9x+b$ で囲まれた図形は右図の斜線部分であり，この部分の面積 S は

$$\begin{aligned}S&=\int_{-1}^{5}\{(9x+5)-(x^3-3x^2)\}\,dx\\&=\int_{-1}^{5}\{-(x+1)^2(x-5)\}\,dx\\&=\int_{-1}^{5}\{-(x+1)^3+6(x+1)^2\}\,dx\\&=\Big[-\frac{1}{4}(x+1)^4+2(x+1)^3\Big]_{-1}^{5}\\&=-\frac{1}{4}\cdot 6^4+2\cdot 6^3\\&=108\end{aligned}$$

である．