n を 2 以上の自然数とし，$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ とおく．ただし，a_1，a_2，$\cdots$，a_n は定数である．以下の問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x+4h)-f(x)}{h}$ の x^{n-1} と x^{n-2} の係数を答えよ．

(2) すべての実数 x について

$$\lim_{h\to 0}\left\{\frac{x}{8}\frac{f(x+4h)-f(x)}{h}-2f(x)-2x^3+x^2+9x\right\}=0$$

が成り立つとき，n を求め，$f(x)$ を具体的に表せ．

(3) $f(x)$ を (2) で得られた関数とする．曲線 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．

(23 三重大 教育・生資 3–2)

【答】

(1) x^{n-1} の係数は $4n$，x^{n-2} の係数は $4a_1(n-1)$

(2) $n=4$，$f(x)=x^4-4x^3+x^2+6x$

(3) 8

【解答】

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

(1) 導関数の定義より

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(x+4h)-f(x)}{h}&=\lim_{h\to 0}4\cdot\frac{f(x+4h)-f(x)}{4h}\\&=4f'(x)\qquad\cdots\cdots ①\\&=4\{nx^{n-1}+a_1(n-1)x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}\}\end{aligned}$$

であるから，$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x+4h)-f(x)}{h}$ の

x^{n-1} の係数は　$\boldsymbol{4n}$　……(答)

x^{n-2} の係数は　$\boldsymbol{4a_1(n-1)}$　……(答)

である．

(2) ① より

$$\lim_{h\to 0}\left\{\frac{x}{8}\frac{f(x+4h)-f(x)}{h}-2f(x)-2x^3+x^2+9x\right\}=0$$

$$\frac{x}{8}\cdot 4f'(x)-2f(x)-2x^3+x^2+9x=0$$

$$\frac{x}{2}f'(x)-2f(x)=2x^3-x^2-9x\qquad\cdots\cdots ②$$

これがすべての実数 x について成り立つ．

$$\begin{aligned}&\frac{x}{2}f'(x)-2f(x)\\=&\frac{x}{2}\{nx^{n-1}+a_1(n-1)x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}\}\\&-2(x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n)\\=&\left(\frac{n}{2}-2\right)x^n+\left\{\frac{a_1(n-1)}{2}-2a_1\right\}x^{n-1}+\cdots+\left(\frac{a_{n-1}}{2}-2a_{n-1}\right)x-2a_n\end{aligned}$$

②の右辺が 3 次であることから，$f(x)$ の次数 n は 3 次以上である．

(i) $n=3$ のとき，②の辺々の x^3 の係数を比較すると

$$\frac{3}{2}-2=2 \qquad \text{これは不合理である．}$$

(ii) $n \geqq 4$ のとき，②の辺々の x^n の係数を比較すると

$$\frac{n}{2}-2=0 \qquad \therefore \quad n=4$$

(i)，(ii) より，

$$\boldsymbol{n=4}$$ ……(答)

である．このとき

$$f(x)=x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4$$

であり

$$\begin{aligned}&\frac{x}{2}f'(x)-2f(x)\\ =&\frac{x}{2}(4x^3+3a_1x^2+2a_2x+a_3)-2(x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4)\\ =&-\frac{1}{2}a_1x^3-a_2x^2-\frac{3}{2}a_3x-2a_4\end{aligned}$$

となる．したがって

$$② \iff -\frac{1}{2}a_1x^3-a_2x^2-\frac{3}{2}a_3x-2a_4=2x^3-x^2-9x$$

であり，辺々の係数を比較すると

$$\begin{cases}-\dfrac{1}{2}a_1=2\\ -a_2=-1\\ -\dfrac{3}{2}a_3=-9\\ -2a_4=0\end{cases} \qquad \therefore \quad a_1=-4,\ a_2=1,\ a_3=6,\ a_4=0$$

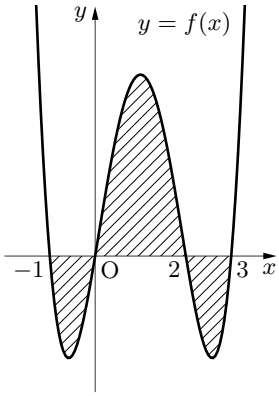
となる．よって，

$$\boldsymbol{f(x)=x^4-4x^3+x^2+6x}$$ ……(答)

である．

(3) (2) より

$$\begin{aligned}f(x)&=x(x^3-4x^2+x+6)\\ &=x(x+1)(x-2)(x-3)\end{aligned}$$



$y=f(x)$ のグラフは右図となり，曲線 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれた図形は斜線部分となる．斜線部分の面積 S は

$$\begin{aligned}S&=\int_{-1}^{0}(-f(x))\,dx+\int_{0}^{2}f(x)\,dx+\int_{2}^{3}(-f(x))\,dx\\ &=-\left[\frac{x^5}{5}-x^4+\frac{x^3}{3}+3x^2\right]_{-1}^{0}\\ &\quad+\left[\frac{x^5}{5}-x^4+\frac{x^3}{3}+3x^2\right]_{0}^{2}\\ &\quad-\left[\frac{x^5}{5}-x^4+\frac{x^3}{3}+3x^2\right]_{2}^{3}\\ &=\left(-\frac{1}{5}-1-\frac{1}{3}+3\right)+2\left(\frac{32}{5}-16+\frac{8}{3}+12\right)-\left(\frac{243}{5}-81+9+27\right)\\ &=\frac{22}{15}+2\cdot\frac{76}{15}-\frac{18}{5}\\ &=\frac{120}{15}\\ &=\boldsymbol{8}\end{aligned}$$ ……(答)

である．