座標平面上の曲線 $y = x|x-2|$ を C とし，直線 $y = mx$ を ℓ とする．ただし，$0 < m < 2$ とする．また，曲線 C と直線 ℓ で囲まれた部分の面積を S とする．以下の問いに答えよ．

(1) 曲線 C と直線 ℓ を同一の座標平面上に図示せよ．
(2) 面積 S を m を用いて表せ．
(3) 面積 S が最小となるときの m の値を求めよ．ただし，そのときの S の値を求める必要はない．

(23 公立はこだて未来大 シス情 2)

【答】

(1) 略

(2) $S = \dfrac{1}{6}(-m^3 + 18m^2 - 12m + 8)$

(3) $m = 6 - 4\sqrt{2}$

【解答】

$$C : y = x|x-2|$$
$$\ell : y = mx$$

(1) $C : y = \begin{cases} -x(x-2) & (x \leqq 2 \text{ のとき}) \\ x(x-2) & (x \geqq 2 \text{ のとき}) \end{cases}$

C と ℓ の交点を求める．

(i) $x \leqq 2$ のとき

$$\begin{cases} y = -x(x-2) \\ y = mx \end{cases} \iff \begin{cases} y = mx \\ x^2 - (2-m)x = 0 \end{cases}$$

$0 < m < 2$ より，交点の座標は

$$(0,\ 0),\quad (2-m,\ m(2-m))$$

である．

(ii) $x \geqq 2$ のとき

$$\begin{cases} y = x(x-2) \\ y = mx \end{cases}$$

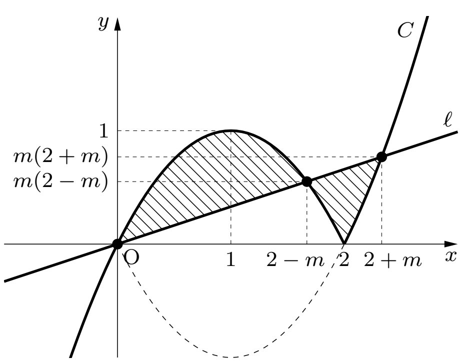
$$\iff \begin{cases} y = mx \\ x^2 - (2+m)x = 0 \end{cases}$$

$0 < m < 2$ より，交点の座標は

$$(2+m,\ m(2+m))$$

である．

(i)，(ii) より，曲線 C と直線 ℓ を同一の座標平面上に図示すると，右図の太線実線部分となる．



(2) $f_1(x) = -x(x-1)$ $(x \leqq 2)$，$f_2(x) = x(x-1)$ $(x \geqq 0)$ とおき，曲線 $y = f_1(x)$ と ℓ で囲まれた部分の面積を S_1，曲線 $y = f_1(x)$ と x 軸で囲まれた部分の面積を S_2，曲線 $y = f_2(x)$ と ℓ で囲まれた部分の面積を S_3 とおく．

曲線 $y = f_2(x)$ と x 軸で囲まれた部分の面積は S_2 と一致することに注意すると，求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= S_1 + \{S_3 - (S_2 - S_1) - S_2\} \\ &= S_3 - 2(S_2 - S_1) \end{aligned}$$

である．

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^{2-m} \{f_1(x) - mx\}\,dx = \int_0^{2-m} -x(x-2+m)\,dx = \frac{(2-m)^3}{6} \\ S_2 &= \int_0^2 \{f_1(x)\}\,dx = \int_0^2 -x(x-2)\,dx = \frac{2^3}{6} = \frac{4}{3} \\ S_3 &= \int_0^{2+m} \{mx - f_2(x)\}\,dx = \int_0^{2+m} -x(x-2-m)\,dx = \frac{(2+m)^3}{6} \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} S &= \frac{(2+m)^3}{6} - 2\left\{\frac{4}{3} - \frac{(2-m)^3}{6}\right\} \\ &= \frac{1}{6}\{(m^3 + 6m^2 + 12m + 8) - 16 + 2(-m^3 + 6m^2 - 12m + 8)\} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{6}(-m^3 + 18m^2 - 12m + 8)} \end{aligned}$$

……(答)

である．

(3) S を微分すると

$$\begin{aligned} S' &= \frac{1}{6}(-3m^2 + 36m - 12) \\ &= -\frac{1}{2}(m^2 - 12m + 4) \end{aligned}$$

$S' = 0$ となるのは

$$m = 6 \pm 4\sqrt{2}$$

であり，$0 < m < 2$ のおける S の増減は右表となる．

m	(0)	$\cdots$	$6-4\sqrt{2}$	$\cdots$	(2)
$S'(m)$		$-$	0	$+$	
$S(m)$		$\searrow$		$\nearrow$	

よって，S が最小となる m の値は

$$\boldsymbol{m = 6 - 4\sqrt{2}}$$

……(答)

である．