a を正の実数とし，2 つの関数を $f(x)=x^3-6x,\ g(x)=-3x+a$ で定める．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 関数 $y=f(x)$ の増減を調べ，グラフをかけ．
(2) 曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=g(x)$ の共有点が 2 つであるとき，a の値を求めよ．
(3) (2) における a に対して曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=g(x)$ で囲まれた部分の面積を求めよ．

(23 富山大 教育・経済 2)

【答】
(1) 略
(2) $a=2$
(3) $\dfrac{27}{4}$

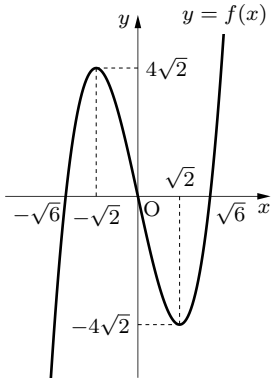
【解答】

$$f(x)=x^3-6x,\ g(x)=-3x+a$$

(1) $f(x)$ を微分すると

$$\begin{aligned} f'(x)&=3x^2-6\\ &=3(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}) \end{aligned}$$

$f(x)$ の増減は下表となり，$y=f(x)$ のグラフは右図となる．



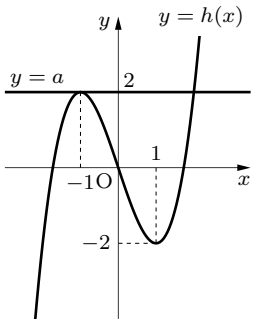
x	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$4\sqrt{2}$	$\searrow$	$-4\sqrt{2}$	$\nearrow$

(2) 曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=g(x)$ の共有点の x 座標は

$$x^3-6x=-3x+a$$

$$\therefore\quad x^3-3x=a \qquad \cdots\cdots ①$$

の実数解である．曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=g(x)$ の共有点が 2 つとなるのは，$h(x)=x^3-3x$ とおくとき，曲線 $y=h(x)$ と直線 $y=a$ の共有点が 2 つとなることである．① が異なる 2 つの実数解をもつときの a の値を求める．



$$h'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$$

$f(x)$ の増減は下表となり，$y=f(x)$ のグラフは右図となる．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$

$a>0$ より，共有点が 2 つとなる a の値は

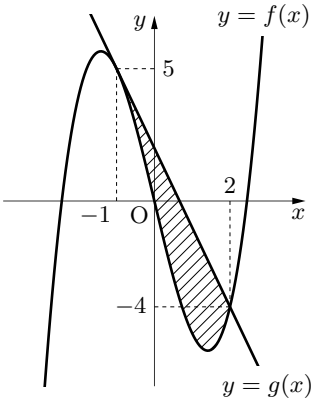
$$\boldsymbol{a=2} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(3) (2) より，$g(x) = -3x + 2$ である．$y = f(x)$ と $y = g(x)$ の共有点の x 座標は

$$x^3 - 6x = -3x + 2$$
$$x^3 - 3x - 2 = 0$$
$$(x+1)^2(x-2) = 0$$
$$\therefore \quad x = -1(\text{重解}),\ 2$$

曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = g(x)$ で囲まれた部分は右図の斜線部分である．面積を S とすると



$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{2} (g(x) - f(x))\,dx \\ &= -\int_{-1}^{2} (x+1)^2(x-2)\,dx \\ &= -\int_{-1}^{2} (x+1)^2(x+1-3)\,dx \\ &= -\left[\frac{(x+1)^4}{4} - 3\frac{(x+1)^3}{3}\right]_{-1}^{2} \\ &= -\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right)3^4 \\ &= \boldsymbol{\frac{27}{4}} \end{aligned}$$

……(答)

である．