xy 平面において放物線 $y=x^2$ を C とする．次の問いに答えよ．

(1) ある直線と C が 2 点 $(\alpha,\ \alpha^2)$，$(\beta,\ \beta^2)$ $(\alpha<\beta)$ で交わるとき，この直線と C で囲まれた部分の面積を A とする．A を定積分で表しそれを計算することにより，$A=\dfrac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$ であることを示せ．

(2) 点 P(1, 1) における C の接線を l とする．P を通り l に垂直な直線と直線 $x=-1$ との交点を Q とし，さらに Q を通り l に平行な直線と C の交点のうち x 座標が負であるものを R とする．放物線 C と線分 PQ および線分 QR により囲まれた部分の面積を S とするとき，$S=\dfrac{10\sqrt{5}}{3}-5$ であることを示せ．

(23 山梨大 教 2)

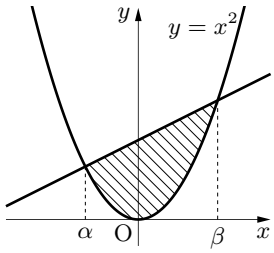
【答】

(1) 略

(2) 略

【解答】

$$C : y=x^2$$



(1) 2 点 $(\alpha,\ \alpha^2)$，$(\beta,\ \beta^2)$ $(\alpha<\beta)$ を通る直線の方程式は

$$y=\frac{\beta^2-\alpha^2}{\beta-\alpha}(x-\alpha)+\alpha^2$$

$$\therefore\quad y=(\beta+\alpha)x-\beta\alpha$$

である．したがって，この直線と放物線 C で囲まれた部分の面積 A は

$$\begin{aligned}
A&=\int_\alpha^\beta\{(\beta+\alpha)x-\beta\alpha-x^2\}\,dx\\
&=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx\\
&=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)\{(x-\alpha)-(\beta-\alpha)\}\,dx\\
&=-\left[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3-\frac{1}{2}(\beta-\alpha)(x-\alpha)^2\right]_\alpha^\beta\\
&=-\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3+\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3\\
&=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3
\end{aligned}$$

…… (証明終わり)

である．

- 教科書流にコツコツ計算すると次のようになる．

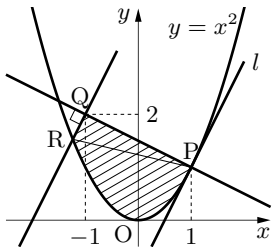
$$\begin{aligned}
A&=\int_\alpha^\beta\{(\beta+\alpha)x-\beta\alpha-x^2\}\,dx\\
&=\left[-\frac{x^3}{3}+(\beta+\alpha)\frac{x^2}{2}-\beta\alpha x\right]_\alpha^\beta\\
&=-\frac{\beta^3-\alpha^3}{3}+(\beta+\alpha)\frac{\beta^2-\alpha^2}{2}-\beta\alpha(\beta-\alpha)\\
&=-\frac{\beta-\alpha}{6}\{2(\beta^2+\beta\alpha+\alpha^2)-3(\beta+\alpha)^2+6\beta\alpha\}\\
&=-\frac{\beta-\alpha}{6}(-\beta^2+2\beta\alpha-\alpha^2)\\
&=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3
\end{aligned}$$

である．

(2) $y=x^2$ から $y'=2x$ なので，点 P(1, 1) における C の接線 l の傾きは 2 である．

したがって，点 P を通り l に垂直な直線の方程式は

$$y=-\frac{1}{2}(x-1)+1$$
$$\therefore\quad y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$$



である．この直線と直線 $x=-1$ との交点 Q の座標は $(-1,\ 2)$ である．さらに，点 Q を通り l に平行な直線の方程式は

$$y=2(x+1)+2$$
$$\therefore\quad y=2x+4$$

であり，R の x 座標は

$$x^2=2x+4$$

の負の解である．その x 座標は $x=1-\sqrt{5}$ であり，R の座標は $\left(1-\sqrt{5},\ 6-2\sqrt{5}\right)$ である．

$$\mathrm{PQ}=\sqrt{(1+1)^2+(1-2)^2}=\sqrt{5},$$
$$\mathrm{QR}=\sqrt{(1-\sqrt{5}+1)^2+(6-2\sqrt{5}-2)^2}$$
$$=\sqrt{(2-\sqrt{5})^2+(4-2\sqrt{5})^2}=|2-\sqrt{5}|\sqrt{5}=5-2\sqrt{5}$$

となるので，直角三角形 PQR の面積は

$$\triangle\mathrm{PQR}=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{PQ}\cdot\mathrm{QR}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{5}\cdot(5-2\sqrt{5})=\frac{5\sqrt{5}}{2}-5$$

である．また，(1) より，直線 PR と放物線 C で囲まれた部分の面積 A は

$$A=\frac{1}{6}\{1-(1-\sqrt{5})\}^3=\frac{5\sqrt{5}}{6}$$

であるから，求める面積 S は

$$S=\triangle\mathrm{PQR}+A$$
$$=\left(\frac{5\sqrt{5}}{2}-5\right)+\frac{5\sqrt{5}}{6}$$
$$=\boldsymbol{\frac{10\sqrt{5}}{3}-5}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

となる．