$f(x)=x^3+5x^2-3x-9$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1) 点 $(-3,\ 0)$ を通り曲線 $y=f(x)$ に接する直線と，曲線 $y=f(x)$ で囲まれた部分の面積を求めよ．

(2) 点 $(-3,\ 0)$ と点 $(-1,\ f(-1))$ を通る直線と曲線 $y=f(x)$ のすべての交点の x 座標をそれぞれ求めよ．

(3) 方程式 $f(x)=m(x+3)$ が 3 つの相異なる整数解をもつような定数 m の値をすべて求めよ．

(23 岩手大 教育・農 4)

【答】

(1) $\dfrac{625}{12}$

(2) $x=-1,\ -2\pm\sqrt{10}$

(3) $m=9$

【解答】

$$f(x)=x^3+5x^2-3x-9$$

(1) $$f'(x)=3x^2+10x-3$$

より，曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式は

$$y=(3t^2+10t-3)(x-t)+t^3+5t^2-3t-9$$

$$\therefore\quad y=(3t^2+10t-3)x-2t^3-5t^2-9$$

であり，この接線が点 $(-3,\ 0)$ を通るから

$$0=(3t^2+10t-3)\cdot(-3)-2t^3-5t^2-9$$

$$0=-2t^3-14t^2-30t$$

$$\therefore\quad 2t(t^2+7t+15)=0$$

$t^2+7t+15=\left(t+\dfrac{7}{2}\right)^2+\dfrac{11}{4}>0$ より，これを満たす実数 t は $t=0$ だけであり，接線の方程式は

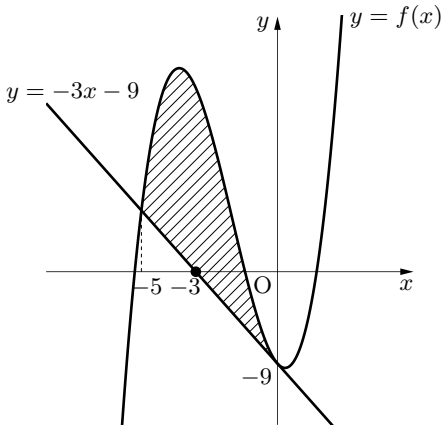
$$y=-3x-9$$

である．曲線 $y=f(x)$ と接線 $y=-3x-9$ の共有点の x 座標は

$$x^3+5x^2-3x-9=-3x-9$$

$$\therefore\quad x^2(x+5)=0$$

$$\therefore\quad x=-5,\ 0\ (\text{重解})$$



$-5<x<0$ のとき，$x^2(x+5)>0$ であるから，求める面積は

$$\int_{-5}^{0}\{f(x)-(-3x-9)\}\,dx$$

$$=\int_{-5}^{0}(x^3+5x^2)\,dx=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{5}{3}x^3\right]_{-5}^{0}=-5^4\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)$$

$$=\boldsymbol{\frac{625}{12}}$$ ……(答)

である．

(2) 2 点 $(-3,\ 0)$, $(-1,\ f(-1))$ を通る直線の傾きは

$$\frac{f(-1)-0}{-1-(-3)}=\frac{-2}{2}=-1$$

であるから，その方程式は

$$y=-(x+3)$$

である．直線 $y=-x-3$ と曲線 $y=f(x)$ のすべての交点の x 座標は，方程式 $f(x)=-(x+3)$ の実数解であるから

$$x^3+5x^2-3x-9=-x-3$$
$$x^3+5x^2-2x-6=0$$
$$(x+1)(x^2+4x-6)$$
$$\therefore\quad \boldsymbol{x=-1,\ -2\pm\sqrt{10}}$$

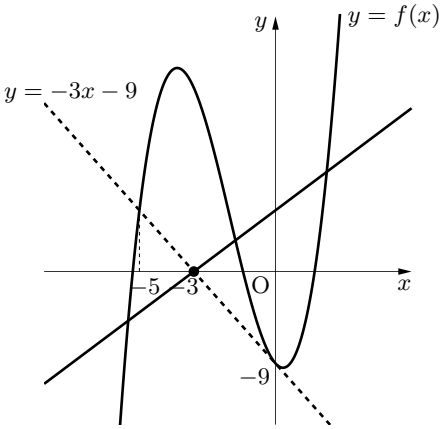
……(答)

である．

(3) 右図より，方程式 $f(x)=m(x+3)$ の 3 つの相異なる解の一つは $-3<x<0$ にあり，それが整数解となるのは $x=-2,\ -1$ のいずれかである．

$x=-1$ のとき (2) より整数解は 1 個のみであり，不適．

したがって，解が 3 つとも整数となる可能性があるのは $x=-2$ がその方程式の解の一つとなるときである．そのとき



$$f(-2)=m(-2+3)$$

であり

$$\begin{aligned}m&=f(-2)\\&=-8+20+6-9\\&=9\end{aligned}$$

である．方程式 $f(x)=9(x+3)$ を解くと

$$x^3+5x^2-3x-9=9x+27$$
$$x^3+5x^2-12x-36=0$$
$$\therefore\quad (x+2)(x+6)(x-3)=0$$
$$\therefore\quad x=-6,\ -2,\ 3$$

として，3 つの相異なる整数解をもつ．

よって，求める m の値は

$$\boldsymbol{m=9}$$

……(答)

である．