t を実数とし，座標平面上の直線

$$L : y = tx$$

と原点 O を通る曲線

$$C : y = -(x-2)^2 + 4$$

を考える．直線 L が曲線 C に接するときの直線 L の傾きを t_0 とし，t の範囲を $0 \leqq t \leqq t_0$ とする．また，直線 L，直線 $x = -a$，x 軸で囲まれた図形の面積を S_1 とする．ただし，$0 < a < 4$ とし，$t = 0$ のときは $S_1 = 0$ とする．さらに，直線 L と曲線 C で囲まれた図形の面積を S_2 とする．ただし，$t = t_0$ のときは $S_2 = 0$ とする．$S_1 + S_2$ を t の関数として $S(t)$ とする．

(1) S_1 を a, t の式で表しなさい．

(2) (i) 関数 $f(x) = -(x-2)^2 + 4$ の導関数 $f'(x)$ を求めなさい．

(ii) t_0 の値を求めなさい．

(3) S_2 を t の多項式またはそれを因数分解した式で表しなさい．

(4) 関数 $S(t)$ の導関数 $S'(t)$ が 0 となる t を a の式で表しなさい．

(5) $S(t)$ の最大値，最小値をそれぞれ実数または a の式で表しなさい．ただし．求めた値が最大値，最小値となる理由もそれぞれ示しなさい．

(23 帯広畜産大 3)

【答】

(1) $S_1 = \dfrac{1}{2}a^2 t$

(2) (i) $f'(x) = -2x + 4$　　(ii) $t_0 = 4$

(3) $S_2 = \dfrac{(4-t)^3}{6}$

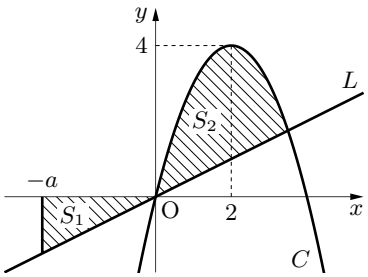
(4) $t = 4 - a$

(5) 最小値：$2a^2 - \dfrac{1}{3}a^3$，最大値: $\begin{cases} \dfrac{32}{3} & \left(0 < a \leqq \dfrac{4\sqrt{3}}{3} \text{ のとき}\right) \\ 2a^2 & \left(\dfrac{4\sqrt{3}}{3} \leqq a < 4 \text{ のとき}\right) \end{cases}$

【解答】

$$L : y = tx$$

$$C : y = -(x-2)^2 + 4$$



(1) S_1 は右図の第 3 象限にある三角形の面積であるから

$$S_1 = \frac{1}{2}|-a||-at|$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{2}a^2 t} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) (i)　$f(x) = -(x-2)^2 + 4$

$$= -x^2 + 4x$$

の導関数は

$$\boldsymbol{f'(x) = -2x + 4} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(ii) t_0 は曲線 $C : y = f(x)$ の $x = 0$ における接線の傾きであるから

$$\boldsymbol{t_0 = f'(0) = 4} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(3) 直線 L と曲線 C の交点の x 座標は

$$\begin{aligned} &tx = -x^2 + 4x \\ &x\{x - (4-t)\} = 0 \\ \therefore\quad &x = 0,\ 4-t \end{aligned}$$

したがって，面積 S_2 は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{S_2} &= \int_0^{4-t} \{f(x) - tx\}\,dx = -\int_0^{4-t} x\{x-(4-t)\}\,dx \\ &= \boldsymbol{\frac{(4-t)^3}{6}} \qquad \cdots\cdots(答) \end{aligned}$$

である．

(4) (1) と (3) の結果から

$$S(t) = \frac{1}{2}a^2 t + \frac{(4-t)^3}{6}$$

となるので

$$S'(t) = \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}(4-t)^2 = \frac{1}{2}(a+4-t)(a-4+t)$$

$S'(t) = 0$ となる t の値は

$$t = 4 \pm a$$

ここで，t の範囲は $0 \leqq t \leqq t_0 = 4$ である．$0 < a < 4$ であるから，条件を満たす t の値は

$$\boldsymbol{t = 4 - a} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(5) (4) より，$S(t)$ の $0 \leqq t \leqq 4$ の増減は下表となる．

t	0	$\cdots$	$4-a$	$\cdots$	4
$S'(t)$		$-$	0	$+$	
$S(t)$		$\searrow$		$\nearrow$	

$S(t)$ は $t = 4 - a$ のとき

$$\begin{aligned} \text{最小値}: S(4-a) &= \frac{1}{2}a^2(4-a) + \frac{\{4-(4-a)\}^3}{6} \\ &= \frac{1}{2}(4a^2 - a^3) + \frac{a^3}{6} \\ &= \boldsymbol{2a^2 - \frac{1}{3}a^3} \qquad \cdots\cdots(答) \end{aligned}$$

をとる．最大値は

$$\max\{S(0),\ S(4)\} = \max\left\{\frac{32}{3},\ 2a^2\right\}$$

である．ここで

$$2a^2 - \frac{32}{3} = 2\left(a^2 - \frac{16}{3}\right) = 2\left(a + \frac{4}{\sqrt{3}}\right)\left(a - \frac{4}{\sqrt{3}}\right)$$

であり，a は $0 < a < 4$ を満たす定数であるから

$$\text{最大値}: \begin{cases} \boldsymbol{\dfrac{32}{3}} & \left(\boldsymbol{0 < a \leqq \dfrac{4\sqrt{3}}{3}}\ \text{のとき}\right) \\ \boldsymbol{2a^2} & \left(\boldsymbol{\dfrac{4\sqrt{3}}{3} \leqq a < 4}\ \text{のとき}\right) \end{cases} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．