座標平面において，原点 O を中心とする円を C_1，放物線 $y=-\dfrac{1}{2}x^2+ax+b$ を C_2 とする．ただし，$a,\ b$ は実数とする．C_1 と C_2 は点 $\mathrm{P}(2,\ -1)$ を共有点にもち，かつ P において共通の接線 l をもつとする．また，C_2 の頂点を通り y 軸に平行な直線を m とし，l と m の交点を Q とする．

(1) $a,\ b$ の値を求めよ．

(2) 直線 OQ，放物線 C_2，直線 m および y 軸で囲まれる図形の面積は，直線 OP により二等分されることを示せ．

(23 東京海洋大 海洋工 2)

【答】

(1) $a=4$，$b=-7$

(2) 略

【解答】

$$C_1 : x^2+y^2=r^2 \quad (r \text{ は正の定数})$$

$$C_2 : y=-\frac{1}{2}x^2+ax+b \quad (a,\ b \text{ は実数の定数})$$

(1) $f(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+ax+b$ とおく．

$$f'(x)=-x+a$$

C_1 と C_2 は点 $\mathrm{P}(2,\ -1)$ を共有するから

$$\begin{cases} 2^2+(-1)^2=r^2 \\ -1=-2+2a+b \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} r=\sqrt{5}\ (>0) \\ 2a+b=1 \end{cases} \quad \cdots\cdots ①$$

が成り立つ．$\mathrm{P}(2,\ -1)$ における $C_1,\ C_2$ の接線はそれぞれ

$$2x-y=5 \qquad \therefore \quad y=2x-5$$

$$y=(-2+a)(x-2)-1 \qquad \therefore \quad y=(-2+a)x+3-2a$$

であり，これらは一致するから

$$\begin{cases} -2+a=2 \\ 3-2a=-5 \end{cases} \qquad \therefore \quad \boldsymbol{a=4}\ (2 \text{ 式を満たす}) \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

① により

$$\boldsymbol{b}=1-2\cdot 4=\boldsymbol{-7} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) (1) の結果より $f(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+4x-7$ である．

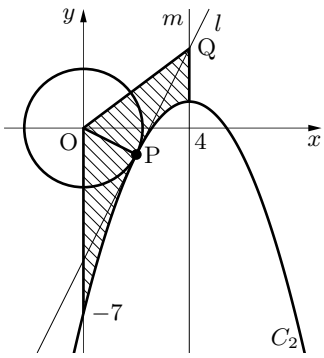
$$y=-\frac{1}{2}(x-4)^2+1$$

より，頂点 $(4,\ 1)$ を通り y 軸に平行な直線 m の方程式は $x=4$ であるから，l と m の交点 Q の座標は

$$\begin{cases} y=2x-5 \\ x=4 \end{cases} \qquad \therefore \quad \mathrm{Q}(4,\ 3)$$

である．

直線 OQ，放物線 C_2，直線 m および y 軸で囲まれる図形の面積を S，直線 OP，放物線 C_2 および y 軸で囲まれる図形の面積を T とおく．



直線 OQ の方程式は $y=\dfrac{3}{4}x$，直線 OP の方程式は $y=-\dfrac{1}{2}x$ であるから

$$\begin{aligned}
S &= \int_0^4 \left(\frac{3}{4}x - f(x)\right) dx \\
&= \int_0^4 \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{13}{4}x + 7\right) dx \\
&= \left[\frac{1}{6}x^3 - \frac{13}{8}x^2 + 7x\right]_0^4 \\
&= \frac{32}{3} - 26 + 28 \\
&= \frac{38}{3}
\end{aligned}$$

であり

$$\begin{aligned}
T &= \int_0^2 \left(-\frac{1}{2}x - f(x)\right) dx \\
&= \int_0^2 \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{9}{2}x^2 + 7\right) dx \\
&= \left[\frac{1}{6}x^3 - \frac{9}{4}x^2 + 7x\right]_0^2 \\
&= \frac{4}{3} - 9 + 14 \\
&= \frac{19}{3}
\end{aligned}$$

である．$T=\dfrac{1}{2}S$ であり，面積 S は直線 OP によって二等分される．　……(証明終わり)