実数 a に対して，座標平面上の放物線 $C_1 : y = x^2 - 1$ と放物線 $C_2 : y = \dfrac{1}{2}(x-a)^2$ の共有点を P，Q とし，P，Q を通る直線を l とする．

(1) 直線 l の方程式を求めよ．
(2) a が $-1 \leqq a \leqq 1$ を満たしながら動くとき，l が通過しうる領域 D を図示せよ．
(3) a が (2) の範囲を動くとき，線分 PQ が通過しうる領域の面積を求めよ．

(23 東京海洋大 海洋工 4-I)

【答】
(1) $l : y = -2ax + a^2 + 1$
(2) 略
(3) $\dfrac{46}{3}$

【解答】

$$C_1 : y = x^2 - 1 \qquad \cdots\cdots ①$$

$$C_2 : y = \frac{1}{2}(x-a)^2 \qquad \cdots\cdots ②$$

(1) C_1 と C_2 の共有点 P，Q は「①かつ②」であり，方程式

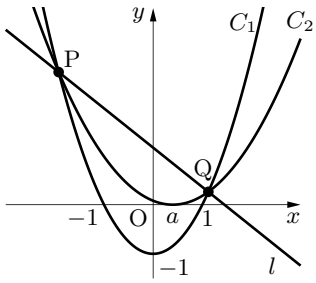
$$y - (x^2 - 1) + k\left\{y - \frac{1}{2}(x-a)^2\right\} = 0 \ (k \text{ は定数})$$

は P，Q を通る図形である．$k = -2$ とおくと

$$(y - x^2 + 1) - (2y - x^2 + 2ax - a^2) = 0$$

$$\therefore \quad y = -2ax + a^2 + 1 \qquad \cdots\cdots ③$$

であり，③ は x, y の 1 次方程式であるから直線の方程式である．すなわち，③ の



$$\boldsymbol{y = -2ax + a^2 + 1} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

が求める直線の方程式である．

- ①，② を連立すると

$$x^2 - 1 = \frac{1}{2}(x-a)^2$$

$$2(x^2 - 1) = x^2 - 2ax + a^2$$

$$\therefore \quad x^2 + 2ax - a^2 - 2 = 0$$

この方程式の 2 解が共有点 P，Q の x 座標である．2 解を p, q とおくと，求める直線 l の方程式は

$$\begin{aligned} y &= \frac{(p^2-1)-(q^2-1)}{p-q}(x-p) + p^2 - 1 \\ &= (p+q)(x-p) + p^2 - 1 \\ &= (p+q)x - pq - 1 \\ &= -2ax - (-a^2 - 2) - 1 = 0 \quad (\because \text{ 解と係数の関係}) \end{aligned}$$

$$\therefore \quad y = -2ax + a^2 + 1$$

である．

(2) l の通過領域 D は，③ を満たす a が $-1 \leqq a \leqq 1$ に存在するような点 $(x,\ y)$ の集合である．

$$③ \iff a^2 - 2xa - y + 1 = 0 \qquad \cdots\cdots ③'$$

$f(a) = a^2 - 2xa - y + 1$ とおき，端点の符号に着目しながら場合分けする．

(i) $f(-1)f(1) \leqq 0$ のとき

③′ を満たす a が $-1 \leqq a \leqq 1$ に存在するから

$$(2+2x-y)(2-2x-y) \leqq 0$$

$$\therefore \quad (y-2x-2)(y+2x-2) \leqq 0$$

は条件を満たす．

(ii) $f(-1)f(1) \geqq 0$ のとき

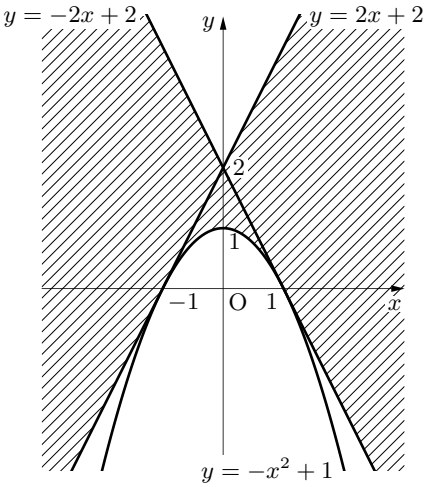
求める条件は

$$\begin{cases} \text{軸の位置}: -1 \leqq x \leqq 1 \\ \text{判別式}: x^2+y-1 \geqq 0 \\ \text{端点の符号}: f(-1) \geqq 0 \text{ かつ } f(1) \geqq 0 \end{cases}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} -1 \leqq x \leqq 1 \\ y \geqq -x^2+1 \\ y \leqq -2x+2 \\ y \leqq 2x+2 \end{cases}$$

である．

l が通過しうる領域 D は (i) または (ii) が表す領域であり，図示すると右図の斜線部分となる．境界も含む．



- $l: y=-2ax+a^2+1$ の通過領域を x を固定し，a を $-1 \leqq a \leqq 1$ の範囲で動かしたときの y の範囲を求め，x を次々動かしていくと考えてもてもよい．

$$\begin{aligned} y &= a^2-2xa+1 \\ &= (a-x)^2+1-x^2 \end{aligned}$$

$g(a)=a^2-2xa+1$ とおく．

(ア) $x \leqq -1$ のとき

$-1 \leqq a \leqq 1$ において $g(a)$ は単調増加であるから

$$g(-1) \leqq y \leqq g(1) \qquad \therefore \quad 2x+2 \leqq y \leqq -2x+2$$

(イ) $-1 \leqq x \leqq 1$ のとき

$-1 \leqq a \leqq 1$ において $g(a)$ は $a=x$ で最小となるから

$$g(x) \leqq y \leqq \max\{g(-1),\ g(1)\} \qquad \therefore \quad 1-x^2 \leqq y \leqq \max\{2x+2,\ -2x+2\}$$

(ウ) $1 \leqq x$ のとき

$-1 \leqq a \leqq 1$ において $g(a)$ は単調減少であるから

$$g(1) \leqq y \leqq g(-1) \qquad \therefore \quad -2x+2 \leqq y \leqq 2x+2$$

(ア) または (イ) または (ウ) を図示すると解答の図を得る．

- $l: y=(a-x)^2+1-x^2$ と変形したときの曲線 $y=1-x^2$ に着目する．

曲線 $y=1-x^2$ と直線 ③ を連立すると

$$\begin{aligned} 1-x^2 &= -2ax+a^2+1 \\ x^2-2ax+a^2 &= 0 \\ \therefore \quad (x-a)^2 &= 0 \end{aligned}$$

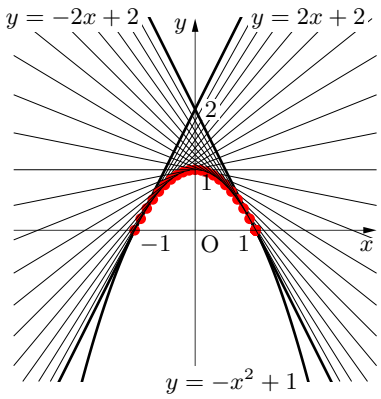
であり，③ は $y=1-x^2$ に $x=a$ で接する直線である．

a は $-1 \leqq a \leqq 1$ の範囲で動き，

$a=-1$ のとき，$y=2x+2$

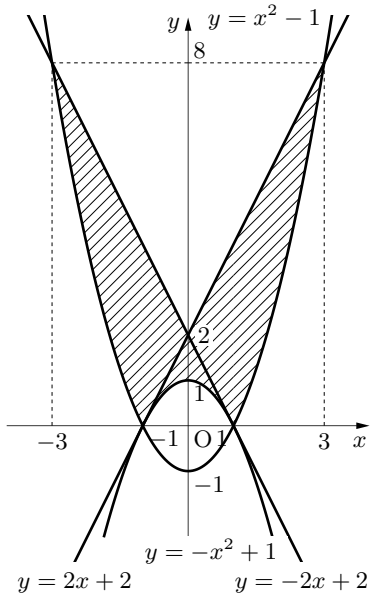
$a=1$ のとき，$y=-2x+2$

であることに注意すると，l の通過領域として右図を得る．



(3) 点 P，Q は放物線 $y = x^2 - 1$ 上にあるので，線分 PQ の通過しうる領域は (2) で求めた領域 D のうちの $y \geqq x^2 - 1$ を満たす部分であり，右図の斜線部分となる．境界も含む

求める面積 S は，図形の対称性より

$$
\begin{aligned}
S &= 2\left\{\int_0^3 \{(2x+2)-(x^2-1)\}\,dx \right. \\
&\qquad \left. - \int_0^1 \{(-x^2+1)-(x^2-1)\}\,dx\right\} \\
&= 2\int_0^3 (-x^2+2x+3)\,dx + 2\int_0^1 (2x^2-2)\,dx \\
&= 2\left[-\frac{x^3}{3}+x^2+3x\right]_0^3 + 4\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_0^1 \\
&= 2(-9+9+9)+4\left(\frac{1}{3}-1\right) \\
&= 18-\frac{8}{3} \\
&= \boldsymbol{\frac{46}{3}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}
$$

である．