放物線 $y=x^2$ を C_1，放物線 $y=x^2-4x+4a$ を C_2 とし，C_1，C_2 に共通な接線を l とする．ただし，a は実数の定数とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) C_1 と C_2 の交点を Q とするとき，Q の x 座標を a を用いて表せ．
(2) l と C_1，C_2 との接点をそれぞれ P_1，P_2 とするとき，P_1，P_2 の x 座標をそれぞれ a を用いて表せ．
(3) Q を通り y 軸に平行な直線は，C_1，C_2 と l で囲まれた図形の面積 S を 2 等分することを示せ．

(23 東京海洋大 生命・資源 2)

【答】

(1) a
(2) $\alpha=a-1,\ \beta=a+1$
(3) 略

【解答】

$$C_1 : y=x^2 \qquad \cdots\cdots ①$$

$$C_2 : y=x^2-4x+4a \qquad \cdots\cdots ②$$

(1) ① と ② を連立して

$$x^2=x^2-4x+4a \qquad \therefore \quad x=a$$

よって，Q の x 座標は

$$\boldsymbol{a} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) l と C_1，C_2 との接点 P_1，P_2 の x 座標をそれぞれ $\alpha,\ \beta$ とおく．
$(x^2)'=2x$ より点 P_1 における C_1 の接線の方程式は

$$y=2\alpha(x-\alpha)+\alpha^2$$

$$\therefore \quad y=2\alpha x-\alpha^2 \qquad \cdots\cdots ③$$

である．同様に $(x^2-4x+4a)'=2x-4$ より，点 P_2 における C_2 の接線の方程式は

$$y=(2\beta-4)(x-\beta)+\beta^2-4\beta+4a$$

$$\therefore \quad y=(2\beta-4)x-\beta^2+4a \qquad \cdots\cdots ④$$

である．③，④は一致するので

$$\begin{cases} 2\alpha=2\beta-4 \\ -\alpha^2=-\beta^2+4a \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} \alpha-\beta=-2 \\ (\alpha-\beta)(\alpha+\beta)=-4a \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha-\beta=-2 \\ \alpha+\beta=2a \end{cases}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{\alpha=a-1,\ \beta=a+1} \qquad \cdots\cdots(答)$$

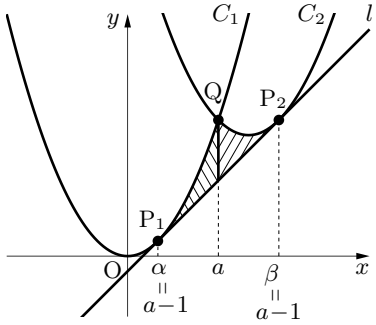
である．

(3) Q を通り y 軸に平行な直線の方程式は $x=a$ である．

C_1，l，$x=a$ で囲まれた図形の面積を S_1，C_2，l，$x=a$ で囲まれた図形の面積を S_2 とおくと，C_1，C_2 と l で囲まれた図形の面積 S は

$$S=S_1+S_2$$

である．



$$\begin{aligned}S_1&=\int_\alpha^a\{x^2-(2\alpha x-\alpha^2)\}\,dx\\&=\int_\alpha^a(x-\alpha)^2\,dx\\&=\left[\frac{(x-\alpha)^3}{3}\right]_\alpha^a\\&=\frac{(a-\alpha)^3}{3}\\&=\frac{1}{3}\quad(\because\ \alpha=a-1)\end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned}S_2&=\int_a^\beta\{(x^2-4x+4a)-(2\beta-4)x+\beta^2-4a)\}\,dx\\&=\int_a^\beta(x-\beta)^2\,dx\\&=\left[\frac{(x-\alpha)^3}{3}\right]_a^\beta\\&=\frac{(\beta-a)^3}{3}\\&=\frac{1}{3}\quad(\because\ \beta=a+1)\end{aligned}$$

であり，$S_1=S_2$ である．

よって，Q を通り y 軸に平行な直線 $x=a$ は，C_1，C_2 と l で囲まれた図形の面積 S を 2 等分する．

…… (証明終わり)