放物線 $C: y=x^2$ と，$x=t\ (>0)$ における C の接線 l，および l に垂直で原点を通る直線 m を考える．以下の問いに答えよ．

(1) l と m の方程式を求めよ．

(2) C と l，および x 軸で囲まれる部分の面積を S_1，C と m で囲まれる部分の面積を S_2 とする．S_1，S_2 をそれぞれ t の式で表せ．

(3) S_1+S_2 の最小値とそのときの t の値を求めよ．

(23 東北学院大 工・情報 A3)

【答】

(1) $l: y=2tx-t^2$，$m: y=-\dfrac{1}{2t}x$

(2) $S_1=\dfrac{t^3}{12}$，$S_2=\dfrac{1}{48t^3}$

(3) $t=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ のとき，最小値 $\dfrac{1}{12}$

【解答】

$$C: y=x^2$$

(1) $y=x^2$ より $y'=2x$ である．

C 上の点 $(t,\ t^2)\ (t>0)$ における C の接線 l の方程式は

$$y-t^2=2t(x-t)$$

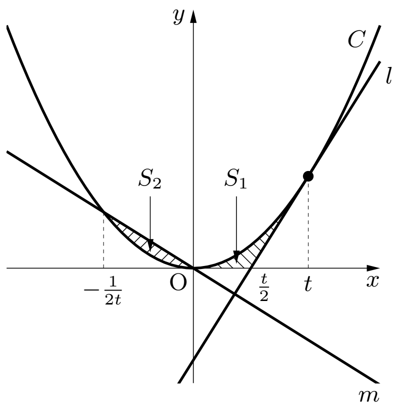
$$\therefore\quad \boldsymbol{y=2tx-t^2} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．また，l に垂直で原点を通る直線 m の方程式は

$$\boldsymbol{y=-\frac{1}{2t}x} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) l と x 軸との交点の座標は $\left(\dfrac{t}{2},\ 0\right)$ であるから



$$\begin{aligned}S_1&=\int_0^t x^2\,dx-\frac{1}{2}\left(t-\frac{t}{2}\right)\cdot t^2\\&=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^t-\frac{t^3}{4}\\&=\boldsymbol{\frac{t^3}{12}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

である．また，m と C の交点の x 座標は

$$x^2=-\frac{1}{2t}x \qquad \therefore\quad x=-\frac{1}{2t},\ 0$$

であるから

$$\begin{aligned}S_2&=\int_{-\frac{1}{2t}}^0\left(-\frac{1}{2t}x-x^2\right)dx\\&=-\int_{-\frac{1}{2t}}^0 x\left(x+\frac{1}{2t}\right)dx\\&=\frac{1}{6}\left(0+\frac{1}{2t}\right)^3\\&=\boldsymbol{\frac{1}{48t^3}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

である．

(3) (2) より

$$S_1+S_2=\frac{1}{12}t^3+\frac{1}{48t^3}$$

$t>0$ より $t^3>0$, $\dfrac{1}{48t^3}>0$ であり，相加平均と相乗平均の関係を用いると

$$S_1+S_2 \geqq 2\sqrt{\frac{1}{12}t^3\cdot\frac{1}{48t^3}}=\frac{1}{12}$$

が成り立つ．等号が成立するのは

$$\frac{1}{12}t^3=\frac{1}{48t^3} \qquad \therefore \quad t=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\ (t>0)$$

のときである．

よって，S_1+S_2 は

$$\boldsymbol{t=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}\ \textbf{のとき，最小値}\ \boldsymbol{\frac{1}{12}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

をとる．