2 つの放物線 $C_1 : y = x^2$ と，$C_2 : y = -x^2 + 4x + a$ がある．a は実数の定数である．以下の問いに答えよ．

(i) C_1 と C_2 が接するような a の値を求めよ．
(ii) (i) で求めた a に対し，C_1, C_2 の両方に接する直線 ℓ の方程式を求めよ．
(iii) (i) で求めた a と (ii) で求めた ℓ に対し，C_1 と ℓ および y 軸で囲まれる部分の面積 S_1 と，C_2 と ℓ および y 軸で囲まれる部分の面積 S_2 の比 $S_1 : S_2$ を求めよ．

(23 東北学院大 工・情報 B 3)

【答】

(i) $a = -2$
(ii) $\ell : y = 2x - 1$
(iii) $S_1 : S_2 = 1 : 1$

【解答】

$$C_1 : y = x^2$$

$$C_2 : y = -x^2 + 4x + a$$

(i) C_1 と C_2 が接する条件は

$$x^2 = -x^2 + 4x + a$$

$$\therefore \quad 2x^2 - 4x - a = 0 \qquad \cdots\cdots ①$$

が重解をもつことである．(判別式) $= 0$ であるから

$$(-2)^2 - 2(-a) = 0 \qquad \therefore \quad \boldsymbol{a = -2} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

- C_1 と C_2 が接するということは，C_1 と C_2 が共有点をもち，共有点における接線が一致するということである．すなわち，接点の x 座標を t とおくと

  $$y = 2t(x - t) + t^2 \text{ と } y = (-2t + 4)(x - t) - t^2 + 4t + a \text{ が一致する}$$

  実数 t が存在するということである．それぞれ

  $$y = 2tx - t^2, \quad y = (-2t + 4)x + t^2 + a$$

  であるから

  $$\begin{cases} 2t = -2t + 4 \\ -t^2 = t^2 + a \end{cases} \qquad \therefore \quad t = 1, \quad a = -2$$

  であり，接線 ℓ の方程式は $y = 2x - 1$ である．

(ii) $a = -2$ のとき ① は

$$2x^2 - 4x + 2 = 0$$

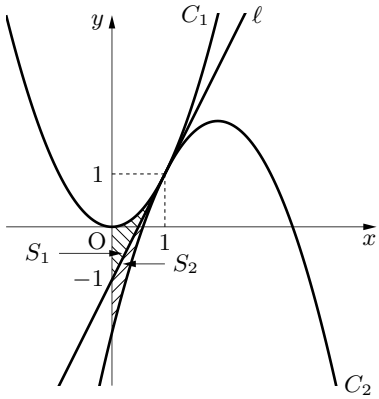
$$\therefore \quad 2(x - 1)^2 = 0 \qquad \therefore \quad x = 1$$

であり，C_1, C_2 は点 $(1,\ 1)$ で接する．点 $(1,\ 1)$ における接線 ℓ の方程式は

$$y = 2(x - 1) + 1$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{\ell : y = 2x - 1} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．



(iii) S_1，S_2 はそれぞれ図の斜線部分の面積である．

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \int_0^1 \{x^2 - (2x-1)\}\,dx \\
&= \int_0^1 (x^2 - 2x + 1)\,dx \\
&\left(= \int_0^1 (x-1)^2\,dx = \left[\frac{(x-1)^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S_2 &= \int_0^1 \{(2x-1) - (-x^2 + 4x - 2)\}\,dx \\
&= \int_0^1 (x^2 - 2x + 1)\,dx \left(= \frac{1}{3}\right)
\end{aligned}
$$

であり，面積比 $S_1 : S_2$ は

$$\boldsymbol{S_1 : S_2 = 1 : 1}$$ ……(答)

である．