k は正の実数とし，2 つの関数

$$f(x)=\frac{2}{3}x^3+x^2-4x+\frac{7}{3},\quad g(x)=x^2+4x+4+k$$

を考える．xy 平面上の曲線 $y=f(x)$ を C_1 とし，放物線 $y=g(x)$ を C_2 とする．以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x)-g(x)$ の極値を k を用いて表せ．

(2) C_1 と C_2 がちょうど 2 個の共有点をもつような k の値を求めよ．

(3) k を (2) で求めた値とする．C_1 と C_2 の 2 個の共有点を通る直線を ℓ とするとき，C_2 と ℓ で囲まれた図形と $x\geqq 0$ の表す領域の共通部分の面積を求めよ．

(23 熊本大 教育・医 (看護) 4)

【答】

(1) 極大値 $-k+9$，極小値 $-k-\dfrac{37}{3}$

(2) $k=9$

(3) $\dfrac{80}{3}$

【解答】

$$C_1: y=f(x)=\frac{2}{3}x^3+x^2-4x+\frac{7}{3},$$
$$C_2: y=g(x)=x^2+4x+4+k$$

(1) $h(x)=f(x)-g(x)$ とおくと

$$\begin{aligned}h(x)&=\left(\frac{2}{3}x^3+x^2-4x+\frac{7}{3}\right)-\left(x^2+4x+4+k\right)\\&=\frac{2}{3}x^3-8x-\frac{5}{3}-k\\h'(x)&=2x^2-8=2(x+2)(x-2)\end{aligned}$$

$h(x)$ の増減は下表となる．

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

よって，$h(x)$ は

$x=-2$ のとき　**極大値 $-k+9$**，　……(答)

$x=2$ のとき　**極小値 $-k-\dfrac{37}{3}$**　……(答)

をとる．

(2) C_1 と C_2 がちょうど 2 個の共有点をもつのは

$f(x)=g(x)$ がちょうど 2 個の実数解をもつ

$\Longleftrightarrow h(x)=0$ がちょうど 2 個の実数解をもつ

すなわち，曲線 $y=h(x)$ が x 軸と共有点を 2 個もつ場合であり，極値の一方が 0 となるときである．(1) より

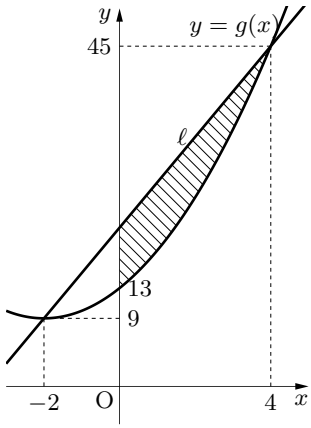
$$(-k+9)\left(-k-\frac{37}{3}\right)=0$$

$k > 0$ より

$$\boldsymbol{k = 9} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(3) $k = 9$ のとき，C_1 と C_2 の共有点の x 座標は $f(x) = g(x)$，すなわち，$h(x) = 0$ の実数解である．



$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{2}{3}x^3 - 8x - \frac{5}{3} - 9 \\ &= \frac{2}{3}(x^3 - 12x - 16) \\ &= \frac{2}{3}(x+2)^2(x-4) \end{aligned}$$

であり，方程式 $h(x) = 0$ の実数解は

$$x = -2 \text{ (重解)},\ 4$$

である．共有点の座標は

$$(-2,\ 9), \quad (4,\ 45)$$

であり，この 2 点を通る直線 ℓ の方程式は

$$y = \frac{45 - 9}{4 - (-2)}(x + 2) + 9$$

$$\therefore \quad y = 6x + 21$$

である．

よって，C_2 と ℓ で囲まれた図形と $x \geqq 0$ の表す領域の共通部分の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_0^4 \{(6x + 21) - (x^2 + 4x + 13)\}\,dx \\ &= \int_0^4 (-x^2 + 2x + 8)\}\,dx \\ &= \Big[-\frac{x^3}{3} + x^2 + 8x\Big]_0^4 \\ &= -\frac{64}{3} + 16 + 32 \\ &= \boldsymbol{\frac{80}{3}} \end{aligned} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．