$f(x) = x^3 + x^2$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ の増減，極値を調べ，$y = f(x)$ のグララの概形をかけ．

(2) $0 < a < 1$ する．曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = a^2(x+1)$ によって囲まれた 2 つの部分の面積の和 $S(a)$ を求めよ．

(3) $0 < a < 1$ の範囲で $S(a)$ を最小にする a 値を求めよ．

(23 琉球大 教育・農・国 2)

【答】

(1) 略

(2) $S(a) = -\dfrac{a^4}{4} + 2a^3 - \dfrac{a^2}{2} + \dfrac{1}{12}$

(3) $a = 3 - 2\sqrt{2}$

【解答】

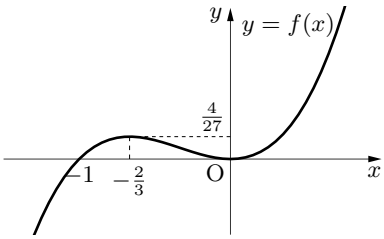
$$f(x) = x^3 + x^2$$

(1) $f(x)$ を微分すると

$$f'(x) = 3x^2 + 2x = x(3x+2)$$

である．$f(x)$ の増減は下表となり，$y = f(x)$ のグラフの概形は右図となる．

x	$\cdots$	$-\frac{2}{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{4}{27}$	$\searrow$	0	$\nearrow$

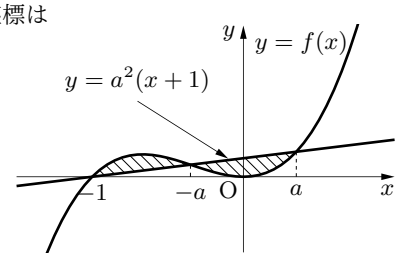


(2) 曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = a^2(x+1)$ の交点の x 座標は

$$x^3 + x^2 = a^2(x+1)$$
$$(x+1)(x^2 - a^2) = 0$$
$$\therefore \quad x = -1,\ \pm a$$

である．

$0 < a < 1$ なので，右図の斜線部分の面積が求める $S(a)$ である．



$$\begin{aligned}
S(a) &= \int_{-1}^{-a} (x^3 + x^2 - a^2x - a^2)\,dx + \int_{-a}^{a} (a^2x + a^2 - x^3 - x^2)\,dx \\
&= \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - a^2\frac{x^2}{2} - a^2x\right]_{-1}^{-a} + 2\left[a^2x - \frac{x^3}{3}\right]_0^a \\
&= \left\{\left(\frac{a^4}{4} - \frac{a^3}{3} - \frac{a^4}{2} + a^3\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} - \frac{a^2}{2} + a^2\right)\right\} + 2\left(a^3 - \frac{a^3}{3}\right) \\
&= \left(-\frac{a^4}{4} + \frac{2a^3}{3}\right) - \left(\frac{a^2}{2} - \frac{1}{12}\right) + \frac{4a^3}{3} \\
&= \boldsymbol{-\frac{a^4}{4} + 2a^3 - \frac{a^2}{2} + \frac{1}{12}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}$$

である．

(3) $S(a)$ を微分すると

$$S'(a) = -a^3 + 6a^2 - a = -a(a^2 - 6a + 1)$$

$S'(a) = 0$ となるのは，$a = 0,\ 3 \pm 2\sqrt{2}$ であり，

$$0 < 3 - 2\sqrt{2} < 1 < 3 + 2\sqrt{2}$$

なので，$0 < a < 1$ の範囲での $S(a)$ の増減は下表となる．

a	(0)	$\cdots$	$3-2\sqrt{2}$	$\cdots$	(1)
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)x$		$\searrow$		$\nearrow$	

よって，$S(a)$ を最小にする a の値は

$$\boldsymbol{a = 3 - 2\sqrt{2}}$$ ……(答)

である．